LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN MA1103
6. august 2013

Vanlige forbehold, K. H.

Oppgave 1

Flaten kan skrives $\underbrace{2x^2-y^2-z^2}_{g(x,y,z)}=0$,

og $\vec{\nabla} g(1,-1,1)$ er en normalvektor i $(1,-1,1)$.
Da $\vec{\nabla} g = (4x, -2y, -2z)$, blir $\vec{\nabla}(1,-1,1) = (4, 2, -2)$.
Planet er gitt ved

$$4(x-1)+2(y+1)-2(z-1)=0$$

eller

$$\underline{2x+y-z=0}$$

Oppgave 2

$\vec{F} = (2xy, x^2, 1)$

a) $$\operatorname{curl}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2 & 1 \end{vmatrix} = (0, 0, 2x-2x) = \underline{(0,0,0)}$$

Altså er feltet konservativt.

b) $\vec{c}(t) = (t^3, 2, t^2+1)$, $0 \le t \le 1$

$\vec{c}\,'(t) = (3t^2, 0, 2t)$

$$\int_C \vec{F}\cdot ds = \int_0^1 (2t^3\cdot 2, (t^3)^2, 1)\cdot(3t^2, 0, 2t)\,dt$$

$$= \int_0^1 (12t^5+2t)\,dt = \left[12t^6/6 + t^2\right]_0^1 = \underline{3}$$

Alternativt observerer vi $\vec{F} = (2xy, x^2, 1) = \vec{\nabla}\overbrace{(x^2y+z)}^{f(x,y,z)}$ og følgelig konservativt. Svaret i b) kan da også finnes slik

$$\int_C \vec{F}\cdot ds = f(1,2,2) - f(0,2,1) = 4-1 = \underline{3}$$

Oppgave 3

Skal først finne de kritiske punktene til $f(x,y) = x e^{-x^2-y^2}$.

$f_x = e^{-x^2-y^2}(1-2x^2)$, $f_y = -2xy\, e^{-x^2-y^2}$.

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ f_y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ eller } y = 0 \end{array}\right\} \text{Krit. punkt } \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

Disse skal karakteriseres, og vi studerer $\Delta = AC - B^2$.

$$f_{xx} = [-2x(1-2x^2) - 4x]e^{-x^2-y^2} = 2x(-3+2x^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{xy} = -2y(1-2x^2)e^{-x^2-y^2} = 0 \text{ for begge krit. punkt}$$

$$f_{yy} = (-2x + 2y^2x)e^{-x^2-y^2} = 2x(-1+y^2)e^{-x^2-y^2}$$

$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$: $f_{xx} f_{yy} = -4x^2(-3+2x^2)e^{-x^2-y^2}$ slik at $\Delta = 4e^{-1} > 0$

Da $A < 0$ i $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ og $A > 0$ i $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, har vi

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ er et lokalt maksimum

$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ er et lokalt minimum

(Har $f(x,y) = r\cos\theta\, e^{-r^2}$ slik at vi ved å se på $g(r) = re^{-r^2}$, $r > 0$, kan finne lokale ekstrema: g har et lokalt maksimum for $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ noe som impliserer at f har et lokalt maksimum for $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\theta = 0$, og et lokalt minimum for $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\theta = \pi$, dvs. i hhv $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ og $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$!)

Oppgave 4

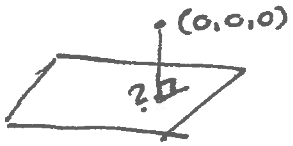
Grensene lar seg lettest studere med polarkoordinater.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta\, r\sin\theta}{\sqrt{r^2}} = \lim_{r\to 0} r\cos\theta\sin\theta = 0$$

siden $|\cos\theta\sin\theta| \leq 1$ og altså begrenset.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} \cos\theta\sin\theta \text{ EKSISTERER IKKE!}$$

Oppgave 5



Geometrisk løsning: Finner skjærings-punktet mellom linjen

$$\vec{l}(t) = (0,0,0) + (3,-2,1)t$$

og planet.

$x = 3t$, $y = -2t$, $z = t$ innsatt i planligningen gir

$3 \cdot 3t - 2(-2t) + t = 7 \Rightarrow \underline{t = \frac{1}{2}}$

Skjæringspunktet er $\underline{\left(3/2, -1, \frac{1}{2}\right)}$

Alternativt bruker vi Lagrange:

Minimerer $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ (lik kv. av avstanden)

når $g(x,y,z) = 3x - 2y + z$ (1)

$\vec{\nabla} f = (2x, 2y, 2z)$, $\vec{\nabla} g = (3, -2, 1)$

$$\left.\begin{aligned} 2x &= 3\tilde{\lambda} \\ 2y &= -2\tilde{\lambda} \\ 2z &= \tilde{\lambda} \end{aligned}\right\} 9\tilde{\lambda} + 4\tilde{\lambda} + \tilde{\lambda} = 7 \text{ ved innsetting i (1)}$$

$$\underline{\tilde{\lambda} = \frac{1}{2}}$$

$\underline{x = \frac{3}{2}, y = -1, z = \frac{1}{2}}$ som før!

Oppgave 6

Her „lukter" det Greensteorem!

$$\int_C e^{y^2-x^2} \cos 2xy \, dx + e^{y^2-x^2} \sin 2xy \, dy \quad (C \text{ pos. orientert})$$

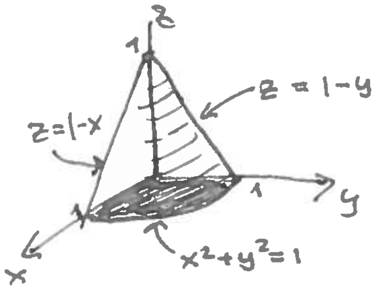
$$= \iint_{\text{Trekant}} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{y^2-x^2} \sin 2xy\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{y^2-x^2} \cos 2xy\right)\right] dx\,dy$$

$$\left(\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{y^2-x^2} \sin 2xy\right) &= -2x e^{y^2-x^2} \sin 2xy + 2y e^{y^2-x^2} \cos 2xy \\ \| \quad & \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{y^2-x^2} \cos 2xy\right) &= 2y e^{y^2-x^2} \cos 2xy - 2x e^{y^2-x^2} \sin 2xy \end{aligned}\right)$$

$$= \iint_{\text{Trekant}} 0 \, dx\,dy = \underline{0}$$

Oppgave 7

T er en kvart kjegle.



a) $\iiint_T z(x^2+y^2)\,dV$

$$= \iint_{\text{quarter disc}} \int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} z(x^2+y^2)\,dz\,dA$$

$$= \iint_{\text{quarter disc}} (x^2+y^2)\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2/2\,dA$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^2(1-r)^2/2\; r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{4}\int_0^1 r^3(1-r)^2\,dr$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^1 (r^3-2r^4+r^5)\,dr = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\right) = \underline{\frac{\pi}{240}}$$

b)

$$\iint_S (x+\cos y,\; y+\sin z,\; z+e^x)\cdot d\mathbf{S}$$

$$\underset{\text{Div T.}}{=} \iiint_T (1+1+1)\,dV$$

$$= 3\iint_{\text{quarter disc}}\int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} dz\,dA$$

$$= 3\iint_{\text{quarter disc}} \left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)dA$$

$$= 3\int_0^{\pi/2}\int_0^1 (1-r)\,r\,dr\,d\theta = \frac{3\pi}{2}\int_0^1 (r-r^2)\,dr = \frac{3\pi}{2}\cdot\frac{1}{6} = \underline{\frac{\pi}{4}}$$

(Om vi skulle regnet ut $\iint_S$ direkte, måtte vi regne ut fire flateintegraler!)