LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN MA1103
August 2014

Vanlige forbehold, Kari Hag

Oppgave 1

La $g(x,y,z) = x^2 + z^2 - e^{xy} - \sin z$. Har da

$$\nabla g = (2x - ye^{xy}, -xe^{xy}, 2z - \cos z)$$

$$\nabla g(1,0,0) = \underline{(2,-1,-1)}$$

Tangentplanet blir

$$2(x-1) - y - z = 0 \quad \text{eller} \quad \underline{2x - y - z = 2}$$

Oppgave 2

Ved kjerneregelen følger

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = 2u\frac{\partial z}{\partial x} - 2u\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = -2v\frac{\partial z}{\partial x} + 2v\frac{\partial z}{\partial y},$$

og vi har

$$\underline{u\frac{\partial z}{\partial v} + v\frac{\partial z}{\partial u}} = -2uv\frac{\partial z}{\partial x} + 2uv\frac{\partial z}{\partial y} + 2uv\frac{\partial z}{\partial x} - 2uv\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$= \underline{0}$$

Oppgave 3

For $(x,y) \neq (0,0)$ er funksjonen kontinuerlig i flg generelle regler da nevneren $\sqrt{x^2+y^2} \neq 0$. I $(0,0)$ studerer vi situasjonen vha. polarkoordinater.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0}\frac{\sin r}{r} = \underline{1} \quad \text{(Kjent. Bruker evt. L'H.)}$$

$$\underline{\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)}. \quad \underline{\text{Funksjonen er kontinuerlig.}}$$

Oppgave 4

$$A = \iint_D dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\sin\theta} r\,dr\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\sin\theta)^2\,d\theta$$

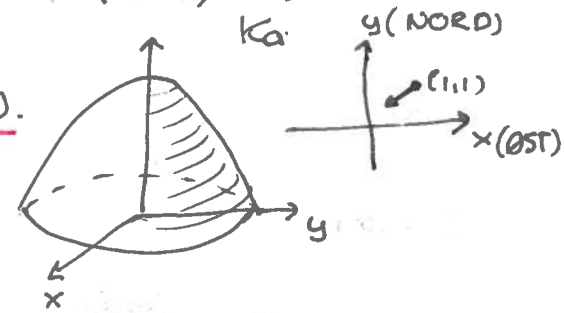
$$= \frac{1}{2}(2\pi + 0 + \pi) = \underline{\frac{3\pi}{2}}$$

Oppgave 5

a) Høyden z stiger mest i retningen $\nabla z(1,1)$ i $(1,1)$.

$$\nabla z(1,1) = (-2ax, -2by)\big|_{(1,1)} = 2(-a,-b)$$

Høyden stiger mest i retning $-(a,b)$.



b) Klinkekula vil trille i den retningen høyden avtar raskest, altså i retning $-\nabla z(1,1)$ eller (a,b).

Oppgave 6

$f(x,y) = 3x^2y - y^3 + x^4$

a)
$$\nabla f = (6xy + 4x^3,\ 3x^2 - 3y^2)$$

$$\nabla f = (0,0) \iff \begin{cases} x(6y+4x^2) = 0 & (1) \\ x^2 = y^2 & (2) \end{cases}$$

Av (1) $x = 0$ noe som gir $y = 0$ ved (2), eller $x \neq 0$ som gir $y = -\frac{2}{3}x^2$ fra (1) og fra (2) $x^2 = \frac{4}{9}x^4 \iff x^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$.

Kristiske punkter : $(0,0)$, $\left(\pm\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

$$H_f = \begin{bmatrix} 6y + 12x^2 & 6x \\ 6x & -6y \end{bmatrix}$$

I $(0,0)$ er diskriminanten 0, så 2. deriverttesten gir ingen informasjon. Men siden f antar både positive ($y=0$, $x \neq 0$) og negative ($x=0$, $y>0$) verdier vilkårlig nær $(0,0)$, er $(0,0)$ et sadelpunkt.

I $\left(\pm\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ er diskriminanten positiv og $C = 9 > 0$ slik at disse to punktene er lokale minima.

b)
$$\left.\begin{aligned} f &\to +\infty \quad \text{når } x \to \infty,\ y = 0 \\ f &\to -\infty \quad \text{når } y \to +\infty,\ x = 0 \end{aligned}\right\} \text{ f har hverken globalt maksimum eller minimum.}$$

Oppgave 7

Problemet kan løses ved Lagranges multiplikatormetode. Vi vil minimere / maksimere

$f(x,y,z) = d^2[(x,y,z)-(2,2,1)] = (x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2$ når

$g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = 4$ (1) der $\nabla g = 2(x,y,z) \neq \underline{0}$.

Må ha $\nabla f = \lambda \nabla g \Leftrightarrow 2((x-2),(y-2),(z-1)) = 2\lambda(x,y,z)$

Altså $x-2 = \lambda x$ (2), $y-2=\lambda y$ (3), $z-1 = \lambda z$ (4) ($\Rightarrow \lambda \neq 1$!)

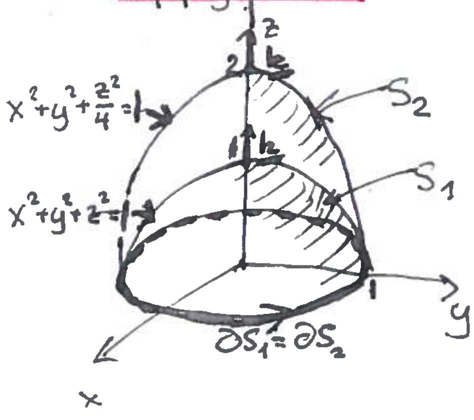
Dermed $x = \frac{2}{1-\lambda} = y$, $z = \frac{1}{1-\lambda}$ som innsatt i (1) gir

$\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2(2^2+2^2+1) = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{1-\lambda} = \pm\frac{2}{3}$ slik at $x=y=\pm\frac{4}{3}$, $z = \pm\frac{2}{3}$.

Punktet $(4/3, 4/3, 2/3)$ ligger nærmest $(2,2,1)$, $(-4/3, -4/3, -\frac{2}{3})$ lengst fra $(2,2,1)$.

Alternativt og enklere finner vi skjæringspunktene mellom linja $\underline{l}(t) = (0,0,0)+t(2,2,1) = t(2,2,1)$ og kulaflata $x^2+y^2+z^2=4$: $t^2(4+4+1)=4 \Leftrightarrow t = \pm\frac{2}{3}$.

Oppgave 8



$\underline{F}(x,y,z) = (-2y, x, e^{x^2+z})$

a) Dette følger fra Stokes' teorem da $\partial S_1 = \partial S_2$ siden begge er enhetssirkelen $x^2+y^2=1, z=0$, positivt orientert.

b) $\iint_{S_1} (\text{curl}\,\underline{F})\cdot d\underline{S} \overset{\text{STOKES}}{=} \int_{\partial S_1} \underline{F}\cdot d\underline{s}$

$= \int_0^{2\pi} (-2\sin\theta, \cos\theta, e^{\cos^2\theta})\cdot(-\sin\theta,\cos\theta,0)\,d\theta$

$\underline{s}(t) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$

$= \int_0^{2\pi} (2\sin^2\theta + \cos^2\theta)\,d\theta$

$= \int_0^{2\pi} [(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+\sin^2\theta]\,d\theta$

$= 2\pi + \pi = \underline{3\pi}$