NTNU
Kunnskap for ei betre verd

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgåve i **MA1103 Fleirdimensjonal analyse**

Fagleg kontakt under eksamen: Marius Thaule

Tlf: 73 59 35 30

Eksamensdato: 3. juni 2014

Eksamenstid (frå–til): 09.00–13.00

Hjelpemiddelkode/Tillatne hjelpemiddel: D: Ingen trykte eller handskrivne hjelpemiddel er tillatne. Bestemt, enkel kalkulator er tillete.

Annan informasjon:
Formelliste ligg ved eksamensoppgåvene.

Alle svar skal grunngjevast. Det skal vere med så mykje mellomrekning at fremgangsmåten går tydeleg fram av svaret.

Målform/språk: nynorsk

Sidetal: 2

Sidetal vedlegg: 1

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgåve 1 Gjeve $z = f(x, y)$ der f er ein deriverbar funksjon og $x = u + v$, $y = u - v$. Finn $\frac{\partial z}{\partial u}$ og $\frac{\partial z}{\partial v}$ og vis at

$$\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 .$$

Oppgåve 2 Lat $T(x, y, z) = e^{x+2y+3z}$ vere temperaturen i eit romleg område om origo.

I kva for retningar frå $(0, 0, 0)$ veks og avtek temperaturen mest?

Kva er den retningsderiverte i desse retningane?

Oppgåve 3 Sjå på funksjonen $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ definert på einingsdisken $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

a) Bruk Lagrange sin multiplikatormetode til å finne maksimums- og minimumspunkta for f på einingssirkelen $x^2 + y^2 = 1$.

b) Kva blir absolutt (globalt) maksimum og minimum for f på D?

Oppgåve 4 Rekn ut integralet

$$\int_0^2 \int_x^2 e^{y^2} \, dy \, dx$$

ved å byte om integrasjonsrekkefølga.

Oppgåve 5 Rekn ut integralet

$$\int_C (5y - e^{\sin x}) dx + [10x - \sin(y^3 + 8y)] dy$$

der C er ein sirkel med radius 2 og sentrum i (a, b). Spesifiser om du reknar integralet med eller mot klokka.

Oppgåve 6 Gjeve vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, xy, 2x^2 - z^2)$.

a) Finn $\operatorname{curl} \mathbf{F}$ og $\operatorname{div} \mathbf{F}$.

b) Grunngje at $\mathbf{F}$ korkje er gradienten til ein C^2-funksjon, eller curl til eit C^2-vektorfelt.

Oppgåve 7 Lat W vere eit området i $\mathbb{R}^3$ gjeve ved $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$, $0 \leq x \leq y$, der S er randen til W, orientert slik at normalvektorane peikar ut av W. Lat $\mathbf{F}$ vere vektorfeltet gjeve ved $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x^2, xz)$.

Finn $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.

Oppgåve 8 Lat funksjonen $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ oppfylle

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq K\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha$$

for alle $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ i A for positive kontanter K og α.

Vis at f er ein kontinuerleg funksjon.

Formelliste ligg ved på neste side.

Diskriminanten i andrederiverttesten:

$$\Delta = AC - B^2 \quad \text{der} \quad A = f_{xx}, \quad B = f_{xy} \quad C = f_{yy}$$

Formlar for skifte av variabel:

$$dx\,dy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv, \qquad dx\,dy\,dz = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,\mathrm{d}v\,dw$$

Sylinderkoordinatar (r, θ, z):

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z,$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad dx\,dy\,dz = r\ dr\,d\theta\,dz$$

Kulekoordinatar (ρ, φ, θ):

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\varphi,$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad dx\,dy\,dz = \rho^2\sin\varphi\ \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

Flateintegral:

$$dS = \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|\,du\,dv$$

Spesialtilfelle: $\quad dS = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\,dx\,dy$

Tyngdepunkt for romlege lekamar:

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iiint_T x\,dm, \quad \bar{y} = \frac{1}{m}\iiint_T y\,dm, \quad \bar{z} = \frac{1}{m}\iiint_T z\,dm$$

Vektoranalyse:

Green sitt teorem: $\quad \displaystyle\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$

Stokes sitt teorem: $\quad \displaystyle\int_{\partial S} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$

Divergensteoremet: $\quad \displaystyle\iint_{\partial W} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\partial W} (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,dS = \iiint_W (\operatorname{div}\mathbf{F})\ dV$