NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA1103 Flerdimensjonal analyse**

Faglig kontakt under eksamen: Kari Hag

Tlf: 73593521

Eksamensdato: Torsdag 13.aug. 2015

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C
Godkjent kalkulator
Ingen andre hjelpemidler

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 1

Kontrollert av:

26/6-15

Dato Sign

Oppgave 1 La

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^4}{x^4+6y^8} & \text{når } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{når} (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a) Vis at $f_x(0,0)$ og $f_y(0,0)$ eksisterer.

b) Vis at f ikke er deriverbar i $(0,0)$ ved å vise at f ikke er kontinuerlig i $(0,0)$.

Oppgave 2 Finn buelengden til kurven med parameterframstilling

$$\mathbf{r}(t)=(\cos t+t\sin t)\mathbf{i}+(\sin t-t\cos t)\mathbf{j}+t^2\mathbf{k}, \qquad \text{for } 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

Oppgave 3 Finn ligningen for tangentplanet til flaten $x^2+y^2-e^{xz}-\sin y=0$ i punktet $(1,0,0)$, og bruk denne til å finne en tilnærmet verdi for x i det punktet på flaten som ligger i nærheten av $(1,0,0)$ med $y=z=1/10$.

Oppgave 4 Funksjonen f er gitt ved $f(x,y)=2x^2-x^4+y^2$.

a) Finn alle kritiske punkter for f, og avgjør om disse er lokale maksima, minima eller sadelpunkter.

b) Finn største og minste verdi for f på kurven $x^4+y^2=4$.

Oppgave 5 Beregn dobbeltintegralet

$$\iint_D (2x+y^2)\,dA$$

når D er alle punkter i første kvadrant som ligger inni sirkelskiven $x^2+y^2\leqslant 4$, men utenfor kvadratet $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$.

Hint: Du kan få bruk for identiteten $\sin^2 u=\frac{1}{2}(1-\cos 2u)$.

Oppgave 6 La $\mathbf{F}(x,y,z)=3x^2y\mathbf{i}+(x^3+y^3)\mathbf{j}$. Verifiser at curl$\mathbf{F}=\mathbf{0}$ och finn en funksjon f slik at $\mathbf{F}=\text{grad}f$.

Oppgave 7 La S være delen av flata $z = 1 + x^2 + y^2$ som ligger inne i sylinderen $x^2 + y^2 = 1$, og la T være legemet begrenset av S og planet $z = 2$.

a) Anta at T har konstant massetetthet $\delta = 1$. Bestem massen til T og koordinatene til tyngdepunktet.

b) Gitt vektorfeltet $\mathbf{F} = f(x, y)\mathbf{i} + xg(x, y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, der f og g har kontinuerlige partiellderiverte som oppfyller

$$f_x + xg_y = 0$$

for alle x, y.

Finn flateintegralet $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, der enhetsnormalvektoren til S har negativ $\mathbf{k}$ komponent.

FORMELLISTE FOR
MA1103 FLERDIMENSJONAL ANALYSE

Diskriminanten i annenderiverttesten:

$$\Delta = AC - B^2 \quad \text{der} \quad A = f_{xx}, \quad B = f_{xy} \quad C = f_{yy}$$

Variabelskifteformler:

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \qquad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

Sylinderkoordinater (r, θ, z):

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z,$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r\ \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

Kulekoordinater (ρ, φ, θ):

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\varphi,$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \rho^2\sin\varphi\ \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

Flateintegral:

$$\mathrm{d}S = \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Spesialtilfelle: $\mathrm{d}S = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Tyngdepunkt for romlige legemer:

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iiint_T x\,\mathrm{d}m, \quad \bar{y} = \frac{1}{m}\iiint_T y\,\mathrm{d}m, \quad \bar{z} = \frac{1}{m}\iiint_T z\,\mathrm{d}m$$

Vektoranalyse:

Greens teorem: $\displaystyle\int_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Stokes' teorem: $\displaystyle\int_{\partial S} \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s} = \iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$

Divergensteoremet: $\displaystyle\iint_{\partial W} \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\partial W} (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,\mathrm{d}S = \iiint_W (\operatorname{div}\mathbf{F})\,\mathrm{d}V$