Løsningsforslag eksamen MA 1103
vår 2015

Vanlige forbehold, Kari Hag

Oppgave 1

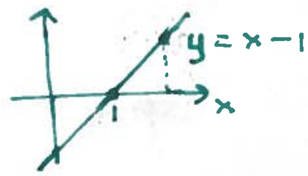
Gradienten til $2x^2+3y^2+z^2$ i $(1,-1,2)$ er $(4x, 6y, 2z)_{(1,-1,2)} = (4,-6,4)$, og ligning for tangentplanet

$$4(x-1)-6(y+1)+4(z-2)=0$$

eller
$$\underline{\underline{2x-3y+2z-9=0}}$$

Oppgave 2

$\underline{\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)=5}$ er gitt. Videre vet vi



$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,0), \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = -\sqrt{2}$$

slik at $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(5+\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\right)=-\sqrt{2}$, og dermed $\underline{\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)=-7}$

$$\underline{\underline{(\operatorname{grad} f)(1,0) = 5\vec{i} - 7\vec{j}}}$$

Oppgave 3

Kritiske punkt i det indre: $y=0$, $x=0$, $\underline{f(0,0)=0}$

Bruker Lagrange på randa og studerer

(1) $(y,x) = \lambda(2x+y, 2y+x)$

(2) $x^2+xy+y^2=3$

Av (1) $\begin{cases} y = \lambda(2x+y) \\ x = \lambda(2y+x) \end{cases} \underset{\substack{\lambda\neq 0 \\ \text{pga (2)}}}{\Longrightarrow} \frac{y}{x} = \frac{2x+y}{2y+x} \Rightarrow 2y^2(+yx) = 2x^2(+xy)$

$y=x$ innsatt i (2) gir $x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$; $\underline{f=1}$

$y=-x$ — " — $x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$; $\underline{f=-3}$

Kandidatene er $-3, 0, 1$, og vi konkluderer med at $\underline{\underline{\text{største verdi er } 1, \text{ minste } -3.}}$

(Da f er en kontinuerlig funksjon på en lukket, begrenset mengde, har f såvel maksimum som minimum)

Oppgave 4

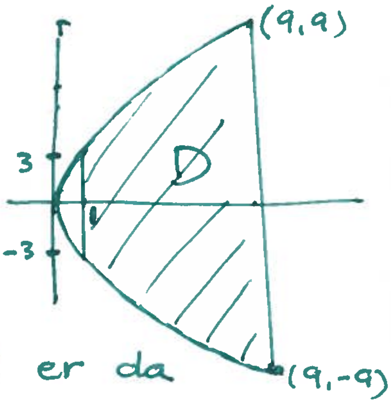
Vi skal vise at $\|\bar{v}(t)\|$ er konstant når $\bar{v}(t) \cdot \bar{a}(t) = 0$ alle t. Ser på

$\|\bar{v}(t)\|^2 = \bar{v}(t) \cdot \bar{v}(t)$ og har

$$\frac{d}{dt}\|\bar{v}(t)\|^2 = \overset{\bar{a}(t)}{\bar{v}'(t)} \cdot \bar{v}(t) + \bar{v}(t) \cdot \overset{\bar{a}(t)}{\bar{v}'(t)} \underset{\text{GITT}}{=} 0 + 0 = \underline{0} \text{ (alle } t)$$

Altså er $\|\bar{v}(t)\|^2$, og dermed $\underline{\underline{\|\bar{v}(t)\|, \text{ konstant.}}}$

Oppgave 5



$D = \{(x,y) \mid -3\sqrt{x} \le y \le 3\sqrt{x},\ 1 \le x \le 9\}$

$g : D \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = 1 + y^2/2x > 0$

a) Volumet V av området T er da

$$V = \int_1^9 \int_{-3\sqrt{x}}^{3\sqrt{x}} \left(1 + \frac{y^2}{2x}\right) dy\, dx$$

$$= \int_1^9 \left[y + \frac{y^3}{6x} \right]_{-3\sqrt{x}}^{3\sqrt{x}} dx = \int_1^9 15\sqrt{x}\, dx = 15 \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} \Big]_1^9 = \underline{\underline{260}}$$

b) $g_x = -\dfrac{y^2}{2x^2}$, $g_y = \dfrac{y}{x}$; $1 + g_y^2 + g_x^2 = 1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{y^2}{2x^2}\right)^2$

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\, dA = \iint_D \sqrt{\left(1 + \frac{y^2}{2x^2}\right)^2}\, dy\, dx$$

$$= \int_1^9 \int_{-3\sqrt{x}}^{3\sqrt{x}} \left(1 + \frac{y^2}{2x^2}\right) dy\, dx = \int_1^9 \left[y + \frac{y^3}{6x^2} \right]_{-3\sqrt{x}}^{3\sqrt{x}} dx = \int_1^9 \left(6\sqrt{x} + \frac{9}{\sqrt{x}}\right) dx$$

$$= 2\left[2x^{3/2} + 9x^{1/2}\right]_1^9 = \underline{\underline{140}}$$

Oppgave 6

La $u = x - 3y$, $v = x + 2y$. Har da

$$x = \frac{2}{5}u + \frac{3}{5}v \ , \ y = -\frac{1}{5}u + \frac{1}{5}v$$

slik at

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} = \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^2} = \underline{\frac{1}{5}}$$

og D^* blir $2 \le u \le 3$, $0 \le v \le \frac{\pi}{4}$. Altså

$$\iint_D (x-3y)\sin(x+2y)\,dx\,dy = \frac{1}{5}\int_0^{\pi/4}\int_2^3 u \sin v \,du\,dv$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{u^2}{2}\right]_2^3 \left[-\cos v\right]_0^{\pi/4} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}$$

Bmk $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1 \Big/ \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$, kjent fra eksamensoppgaver. Blir litt enklere.

Oppgave 7

$m = \iiint_K \delta(x,y,z)\,dV$. Med kulekoordinater

$$m = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{5} (2\rho^2+1)\rho^2 \sin\phi \,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

$$= \int_0^5 (2\rho^2+1)\rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\phi\,d\phi = \left[\frac{2\rho^5}{5} + \frac{\rho^3}{3}\right]_0^5 4\pi = \underline{\underline{\frac{15\,500\,\pi}{3}}}$$

Oppgave 8

Vi observerer at $\bar{F} = \text{grad}\, xyz$, og da $\bar{c}(0) = (1,0,0)$, $\bar{c}(\frac{\pi}{4}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ har vi

$$\int_C \bar{F}\cdot d\bar{s} = xyz\Big]_{(1,0,0)}^{(\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2,\ \frac{\pi}{4})} = \underline{\underline{\frac{\pi}{8}}}$$

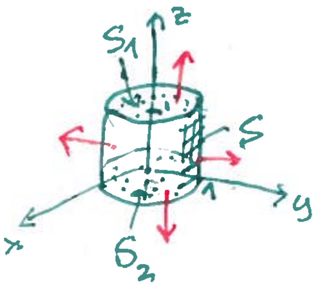
Alternativt kunne vi bruke parametriseringen (myetyngre):

$$\int_C \bar{F}\cdot d\bar{s} = \int_0^{\pi/4} (t\sin t,\ t\cos t,\ \cos t \sin t)\cdot(-\sin t, \cos t, 1)\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/4} t\,\overbrace{(\cos^2 t - \sin^2 t)}^{\cos 2t}\,dt + \int_0^{\pi/4} \sin t \cos t\,dt = \cdots = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{\pi}{8}}}$$

Oppgave 9

Vi bruker divergensteoremet og har



$$(1)\quad \iint_S \operatorname{curl}\bar{v}\cdot d\bar{S} + \iint_{S_1} \operatorname{curl}\bar{v}\cdot d\bar{S}_1 + \iint_{S_2} \operatorname{curl}\bar{v}\cdot d\bar{S}_2$$

$$\underset{DT}{=} \iiint_W \operatorname{div}\operatorname{curl}\bar{V}\, dV = \iiint_W 0\, dV = \underline{0}$$

(W er den kompakte sylinderen, $\partial W = S \cup S_1 \cup S_2$)

La $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}$. Har

$$(2)\quad \iint_{S_1} \operatorname{curl}\bar{v}\cdot d\bar{S}_1 = \iint_D \operatorname{curl}\bar{V}\cdot \bar{k}\sqrt{1+0^2+0^2}\, dA = \iint_D \operatorname{curl}\bar{v}\cdot\bar{k}\, dA$$

$$(3)\quad \iint_{S_2} \operatorname{curl}\bar{v}\cdot d\bar{S}_2 = \iint_D \operatorname{curl}\bar{v}\cdot(-\bar{k})\, dA = -\iint_D \operatorname{curl}\bar{v}\cdot\bar{k}\, dA$$

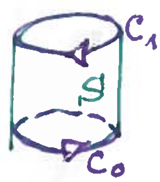
$$\operatorname{curl}\bar{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y}, -\frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) \text{ da } \frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{\partial v_2}{\partial z} = 0$$

$\operatorname{curl}\bar{v}\cdot\bar{k} = \dfrac{\partial v_2}{\partial x} - \dfrac{\partial v_1}{\partial y}$; samme verdi for $(x,y,0)$ og $(x,y,1)$
(siden v_1 og v_2 ikke avhenger av z).

Integralene (2) og (3) får altså motsatte verdier.

Fra (1) følger da

$$\iint_S \operatorname{curl}\bar{v}\cdot d\bar{S} = \underline{\underline{0}}$$



<u>Bmk</u> Det ligger på kanten av pensum å tenke på S som en flate med to hull der en generalisering av Stokes' teorem gjelder. (Husk fig 8.1.5). Men gjør vi det, blir $\iint_S \operatorname{curl}\bar{v}\cdot d\bar{S} = \int_{C_0} \bar{v}\cdot d\bar{s} + \int_{C_1} \bar{v}\cdot d\bar{s} = 0$ ☺