NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA1103 Flerdimensjonal analyse**

Faglig kontakt under eksamen: Antti Haimi

Tlf: 73591773

Eksamensdato: 19. mai 2015

Eksamenstid (fra–til): 09:00-13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemte, enkle kalkulatorer tillatt.

Annen informasjon:
Alle svar skal begrunnes. Det skal være med så mye mellomregning at framgangsmåten går tydelig fram. En liste med formler er vedlagt på siste side av eksamenspapirene.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 1

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 Finn en ligning for tangentplanet til ellipsoiden

$$2x^2 + 3y^2 + z^2 = 9$$

i punktet $(1, -1, 2)$.

Oppgave 2 Funksjonen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er deriverbar. Vi vet også at den retningsderiverte i $(1, 0)$ langs positiv $x-$akse er 5, og at den retningsderiverte i $(1, 0)$ langs linja $y = x - 1$ i retning av positiv y, er $-\sqrt{2}$. Hva er gradienten til f i $(1, 0)$?

Oppgave 3 Bestem den største og minste verdien som funksjonen $f(x, y) = xy$ oppnår i området

$$D = \{(x, y)|x^2 + xy + y^2 \leq 3\}.$$

Oppgave 4 Vis at hvis akselerasjonen $\vec{a}(t)$ til en punktmasse alltid er perpendikulær på hastigheten $\vec{v}(t)$, så er farten $\|\vec{v}(t)\|$ konstant. (Hint: $\|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$.)

Oppgave 5 Gitt $g : D \to \mathbb{R}$, der

$$D = \{(x, y)|1 \leq x \leq 9, -3\sqrt{x} \leq y \leq 3\sqrt{x}\}$$

og $g(x, y) = 1 + \frac{y^2}{2x}$.

a) Finn volumet av området

$$T = \{(x, y, z)|(x, y) \in D, 0 \leq z \leq g(x, y)\}.$$

b) Finn arealet av flaten

$$S = \{(x, y, z)|z = g(x, y), (x, y) \in D\}$$

Oppgave 6

Gjør et lineært variabelskifte og beregn

$$\int\int_D (x - 3y)\sin(x + 2y)dxdy$$

der D er bestemt av $2 \leq x - 3y \leq 3, 0 \leq x + 2y \leq \frac{\pi}{4}$.

Oppgave 7

Beregn massen til en kompakt kule i $\mathbb{R}^3$ med sentrum i $(0,0,0)$ og radius 5 når massetettheten $\delta(x,y,z)$ er gitt ved

$$\delta(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 1$$

Oppgave 8

La $\vec{F}$ være et vektorfelt i $\mathbb{R}^3$ gitt ved $\vec{F}(x,y,z) = (yz, xz, xy)$. Finn

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

når C er kurven med parametrisering $\vec{c}(t) = (\cos t, \sin t, t), 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$.

Oppgave 9

La S være sylinderflata $\{(x,y,z)|x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$.

Finn

$$\int\int_S \text{curl } \vec{v} \cdot d\vec{S}.$$

når $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ er et $\mathcal{C}^2-$vektorfelt i $\mathbb{R}^3$ der v_1 og v_2 ikke avhenger av z.

Formelliste på neste side

FORMELLISTE FOR
MA1103 FLERDIMENSJONAL ANALYSE

Diskriminanten i annenderiverttesten:

$$\Delta = AC - B^2 \quad \text{der} \quad A = f_{xx}, \quad B = f_{xy} \quad C = f_{yy}$$

Variabelskifteformler:

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \qquad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

Sylinderkoordinater (r, θ, z):

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z,$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r\ \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

Kulekoordinater (ρ, φ, θ):

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\varphi,$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \rho^2\sin\varphi\ \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

Flateintegral:

$$\mathrm{d}S = \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Spesialtilfelle: $\mathrm{d}S = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Tyngdepunkt for romlige legemer:

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iiint_T x\,\mathrm{d}m, \quad \bar{y} = \frac{1}{m}\iiint_T y\,\mathrm{d}m, \quad \bar{z} = \frac{1}{m}\iiint_T z\,\mathrm{d}m$$

Vektoranalyse:

Greens teorem: $\displaystyle\int_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Stokes' teorem: $\displaystyle\int_{\partial S} \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s} = \iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$

Divergensteoremet: $\displaystyle\iint_{\partial W} \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\partial W} (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,\mathrm{d}S = \iiint_W (\operatorname{div}\mathbf{F})\,\mathrm{d}V$