NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA1103 Flerdimensjonal analyse**

Faglig kontakt under eksamen: Markus Grasmair

Tlf: 97 58 04 35

Eksamensdato: 8. august 2018

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt (Casio fx-82ES PLUS, Casio fx-82EX, Citizen SR-270X, Citizen SR-270X College, Hewlett Packard HP30S).

Annen informasjon:

Eksamen innholder 10 deloppgaver, alle med samme vekting. Les igjennom samtlige oppgaver før du begynner; den opplevde vanskelighetsgraden er ikke nødvendigvis i stigende rekkefølge. Skriv tydelig og entydig, tegn gjerne, og motiver dine beregninger/beviser. Dersom en metode eller setning angis i oppgaven skal denne brukes, ellers er valget av bevis/metode fritt. Spør dersom noe er uklart.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 1

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 La $f \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ være en skalar funksjon og $\mathbf{F} \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ et vektorfelt. Vis at

$$\operatorname{div}(\mathbf{curl}(\mathbf{F})) \stackrel{\text{def.}}{=} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$$

og

$$\mathbf{curl}(\mathbf{grad}(f)) \stackrel{\text{def.}}{=} \nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}.$$

Oppgave 2 La $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være den glatte funksjonen

$$(x, y) \mapsto \mathrm{e}^{xy} \cos(x).$$

a) Finn andre ordens Taylor-approksimasjon til f i punktet $(0, 0)$ (du trenger ikke å angi den eksakte størrelsen på feilestimatet, som blir av størrelsesorden $|(x, y)|^3$). Finn en ligning for tangentplanet til f i punktet $(0, 0)$.

b) Finn alle kritiske punkter til f. Avgjør for ett av dem (valgfritt hvilket dersom det finnes flere) om det er et maksimum, minimum eller sadelpunkt for f.

Oppgave 3 Gitt parametriseringen

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t^2), \qquad t \in [0, \pi],$$

og funksjonen

$$f(x, y, z) = \left(x^2 + y^2 + 4z\right)^{\frac{1}{2}},$$

beregn kurveintegralet $\int_\gamma f \, \mathrm{d}s$.

Oppgave 4 La D være det spissformete området $\{(x, y)\colon y > |x|\}$ i $\mathbb{R}^2$ og $f\colon D \to \mathbb{R}$ funksjonen gitt ved

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{y^2}.$$

Vis at f er begrenset på D. Avgjør deretter om grenseverdien $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ eksisterer.

Oppgave 5 La $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(y^2x^2, \tfrac{2}{3}yx^3\right),$$

og la γ være den stykkevis glatte kurven gitt av triangelet med hjørner i $(0,0)$, $(1,0)$ og $(0,1)$ og orientert i den retningen (mot klokka).

a) Finn en stykkevis glatt parametrisering av γ og den utadrettede enhetsnormalen $\mathbf{n}$ langs med kurven. Beregn deretter

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s.$$

b) Beregn videre

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}s,$$

der $\mathbf{T}$ er enhetstangenten til γ.

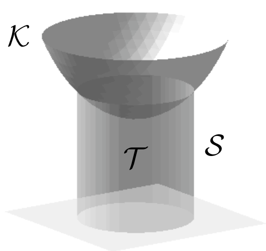
Oppgave 6 Finn Jakobimatrisen til avbildningen $\Phi\colon (r,\theta,s) \mapsto (x,y,z)$,

$$\Phi\colon \begin{bmatrix} r \\ \theta \\ s \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} r^2\cos(\theta) \\ r^2\sin(\theta) \\ s^3 \end{bmatrix},$$

og vis at Φ har en deriverbar invers på området $\{(x,y,z)\colon x^2+y^2>0, z>0\}$.

Oppgave 7 La

$$\mathcal{S} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon x^2+y^2=1,\ 0\le z\le 3-\sqrt{3}\},$$



være sylinderen med radius 1, bunn i $z=0$ og topp i $z=3-\sqrt{3}$, og la

$$\mathcal{K} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon x^2+y^2+(z-3)^2=4\}$$

være kulen med radius 2 og sentrum i $(0,0,3)$. Flatene $\mathcal{S}$ og $\mathcal{K}$ skjærer hverandre i en sirkel i toppen av $\mathcal{S}$.

a) Beregn volumet av legemet $\mathcal{T}$ begrenset av $\mathcal{S}$, $\mathcal{B}$ og planet $z=0$.

b) Beregn $\iint_\mathcal{S} \mathbf{curl}(\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$ for vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (2yz, 0, xy).$$

Formler og konvensjoner

$$\begin{aligned}
x &= r\cos(\theta) = \varrho\cos(\theta)\sin(\varphi), & 0 &\le r, \varrho \\
y &= r\sin(\theta) = \varrho\sin(\theta)\sin(\varphi), & 0 &\le \theta < 2\pi \\
z &= z \qquad\quad\; = \varrho\cos(\varphi), & 0 &\le \varphi \le \pi.
\end{aligned}$$

$$\mathrm{d}s = |\mathbf{r}'(t)|\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}S = |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$(\mathrm{d}S = |(z_x, z_y, -1)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{for} \quad z = z(x,y))$$

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \varrho^2\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{r}'(s)\,\mathrm{d}s = \mathbf{T}\,\mathrm{d}s = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}|\mathbf{r}'(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$(\mathrm{d}\mathbf{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = (\tfrac{dx}{dt}, \tfrac{dy}{dt})\mathrm{d}t \quad \text{for} \quad \mathbf{r} = (x,y))$$

$$\mathrm{curl}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\tfrac{\partial F_3}{\partial x_2} - \tfrac{\partial F_2}{\partial x_3}, \tfrac{\partial F_1}{\partial x_3} - \tfrac{\partial F_3}{\partial x_1}, \tfrac{\partial F_2}{\partial x_1} - \tfrac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)$$

$$\iint_A \left(\tfrac{\partial Q}{\partial x} - \tfrac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}A = \int_{\partial A} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

$$\iiint_V \mathrm{div}(\mathbf{F})\,\mathrm{d}V = \iint_{\partial V} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$$

$$\iint_S \mathrm{curl}(\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \int_{\partial S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}s$$