Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA1103 Flerdimensjonal analyse**

Faglig kontakt under eksamen: Markus Grasmair

Tlf: 97 58 04 35

Eksamensdato: 8. august 2018

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt (Casio fx-82ES PLUS, Casio fx-82EX, Citizen SR-270X, Citizen SR-270X College, Hewlett Packard HP30S).

Annen informasjon:
Eksamen innholder 10 deloppgaver, alle med samme vekting. Les igjennom samtlige oppgaver før du begynner; den opplevde vanskelighetsgraden er ikke nødvendigvis i stigende rekkefølge. Skriv tydelig og entydig, tegn gjerne, og motiver dine beregninger/beviser. Dersom en metode eller setning angis i oppgaven skal denne brukes, ellers er valget av bevis/metode fritt. Spør dersom noe er uklart.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 9

Antall sider vedlegg: 1

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 La $f \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ være en skalar funksjon og $\mathbf{F} \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ et vektorfelt. Vis at

$$\operatorname{div}(\mathbf{curl}(\mathbf{F})) \stackrel{\text{def.}}{=} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$$

og

$$\mathbf{curl}(\mathbf{grad}(f)) \stackrel{\text{def.}}{=} \nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}.$$

Løsning Vi har

$$\mathbf{curl}(\mathbf{F}) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right).$$

Forkort $(F_i)_{jk} = \frac{\partial^2 F_j}{\partial x_k \partial x_i}$. Da er

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbf{curl}(\mathbf{F})) &= (F_3)_{21} - (F_2)_{31} + (F_1)_{32} - (F_3)_{12} + (F_2)_{13} - (F_1)_{23} \\ &= \underbrace{(F_3)_{21} - (F_3)_{12}}_{0} + \underbrace{(F_2)_{13} - (F_2)_{31}}_{0} + \underbrace{(F_1)_{32} - (F_1)_{23}}_{0} = 0,\end{aligned}$$

ettersom andre ordningens deriverte kommuterer for to ganger kontinuerlig deriverbare funksjoner.

På samme måte, dersom vi i formeln for $\mathbf{curl}(\mathbf{F})$ erstatterF_j med $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ og forkorter denne som f_j, får vi med samme typ av notasjon som ovenfor at

$$\mathbf{curl}(\mathbf{grad}(f)) = (f_{32} - f_{23}, f_{13} - f_{31}, f_{21} - f_{12}) = (0, 0, 0) = \mathbf{0},$$

da f er C^2.

Oppgave 2 La $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være den glatte funksjonen

$$(x, y) \mapsto \mathrm{e}^{xy}\cos(x).$$

a) Finn andre ordens Taylor-approksimasjon til f i punktet $(0, 0)$ (du trenger ikke å angi den eksakte størrelsen på feilestimatet, som blir av størrelsesorden $|(x, y)|^3$). Finn en ligning for tangentplanet til f i punktet $(0, 0)$.

b) Finn alle kritiske punkter til f. Avgjør for ett av dem (valgfritt hvilket dersom det finnes flere) om det er et maksimum, minimum eller sadelpunkt for f.

Løsning Da funskjonen f er glatt kan vi beregne så mange deriverte vi ønsker. Vi har:

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{xy}\cos(x) = \Big|_{(0,0)} 1,$$

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \mathrm{e}^{xy}\left(y\cos(x) - \sin(x)\right) = \Big|_{(0,0)} 0, \\ f_y(x, y) &= \mathrm{e}^{xy} x\cos(x) = \Big|_{(0,0)} 0, \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= y\mathrm{e}^{xy}\left(y\cos(x) - \sin(x)\right) - \mathrm{e}^{xy}\left(y\sin(x) + \cos(x)\right) = \Big|_{(0,0)} - 1, \\ f_{xy}(x, y) &= \mathrm{e}^{xy}\left(xy\cos(x) + \cos(x) - x\sin(x)\right) = \Big|_{(0,0)} 1, \\ f_{yy}(x, y) &= \mathrm{e}^{xy}\Big(x^2\cos(x)\Big) = \Big|_{(0,0)} 0. \end{aligned}$$

Taylors teorem gir da at

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0, 0) + \nabla f(0, 0) \cdot (x, y) + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}\Bigg|_{(0,0)}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \mathcal{O}(|(x, y)|^3) \\ &= 1 + (0, 0) \cdot (x, y) + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \mathcal{O}(|(x, y)|^3) \\ &= 1 + xy - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(|(x, y)|^3), \end{aligned}$$

der feil-leddet ikke trenger å angis i løsningen. Ettersom $\nabla f = (0, 0)$ i $(x, y, f(x, y)) = (0, 0, 1)$ ligger tangentplanet parallelt med (x, y)-planet og har den enkle formeln

$$\{(x, y, z)\colon z = 1\},$$

eller kort og godt $z = 1$.

Oppgave 3 Gitt parametriseringen

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t^2), \qquad t \in [0, \pi],$$

og funksjonen

$$f(x, y, z) = \left(x^2 + y^2 + 4z\right)^{\frac{1}{2}},$$

beregn kurveintegralet $\int_\gamma f \, \mathrm{d}s$.

Løsning Kurven γ er glatt og vi har

$$|\dot{\gamma}(t)| = \left((-\sin(t))^2 + \cos^2(t) + (2t)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1 + 4t^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Evaluert langs kurven reduseres f til samme uttrykk,

$$f(\gamma(t)) = \left((\cos^2(t) + \sin^2(t) + 4t^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1 + 4t^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

slik at

$$\begin{aligned}\int_\gamma f \, \mathrm{d}s &= \int_0^\pi f(\gamma(t))|\dot{\gamma}(t)| \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi \left(1 + 4t^2\right) \, \mathrm{d}t = \left[t + \frac{4}{3}t^3\right]_0^\pi = \pi + \frac{4}{3}\pi^3.\end{aligned}$$

Oppgave 4 La D være det spissformete området $\{(x, y) \colon y > |x|\}$ i $\mathbb{R}^2$ og $f \colon D \to \mathbb{R}$ funksjonen gitt ved

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{y^2}.$$

Vis at f er begrenset på D. Avgjør deretter om grenseverdien $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ eksisterer.

Løsning I polarkoordinater

$$(x, y) = r(\cos(\theta), \sin(\theta)), \qquad r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

er

$$f(x, y) = \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\sin(r^2)}{r^2}.$$

Ettersom området D kan karakteriseres ved $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$, $r > 0$, er

$$1 \leq \frac{1}{\sin^2(\theta)} \leq \frac{1}{\sin^2(\pi/4)}.$$

(Merk her at sin er symmetrisk kring y-akseln $\theta = \pi/2$, og monoton på $[0, \pi/2]$. For alle $r > 0$ gjelder videre at

$$0 \leq \frac{\sin(r^2)}{r^2} \leq 1,$$

slik at f er begrenset:

$$0 \leq f(x, y) \leq \frac{1}{\sin^2(\pi/4)}, \qquad (x, y) \in D.$$

Grenseverdien $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ eksisterer derimot ikke: ettersom

$$\lim_{r\to 0} \frac{\sin(r^2)}{r^2} = 1,$$

kan vi velge to forskjellige vinkler inn mot origo i D, f.eks. $\theta_1 = \pi/4$ og $\theta_2 = \pi/2$, og erholde forskjellige grenser (i dette tilfelle 2 og 1).

Oppgave 5 La $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(y^2x^2, \tfrac{2}{3}yx^3\right),$$

og la γ være den stykkevis glatte kurven gitt av triangelet med hjørner i $(0,0)$, $(1,0)$ og $(0,1)$ og orientert i den retningen (mot klokka).

a) Finn en stykkevis glatt parametrisering av γ og den utadrettede enhetsnormalen $\mathbf{n}$ langs med kurven. Beregn deretter

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s.$$

b) Beregn videre

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}s,$$

der $\mathbf{T}$ er enhetstangenten til γ.

Løsning Vi skriver $\gamma = \bigcup_{j=1}^3 \gamma_j$, med

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= (t,0), && 0 \le t \le 1,\\
\gamma_2(t) &= (1-t,t), && 0 \le t \le 1,\\
\gamma_3(t) &= (0,1-t), && 0 \le t \le 1,
\end{aligned}$$

der t svarer mot henholdvis x, y, og $-y$ i parameteriseringen. Den utadrettede enhetsnormalen på langs disse tre stykker av γ er da konstant på hvert stykke:

$$\mathbf{n}_1 = (0,-1), \qquad \mathbf{n}_2 = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}}, \qquad \mathbf{n}_3 = (-1,0).$$

Da blir

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s &= \int_{\gamma_1} (0,0)\cdot(0,-1)\,\mathrm{d}s + \int_{\gamma_2} \mathbf{F}(\gamma_2)\cdot\mathbf{n}_2\,\mathrm{d}s + \int_{\gamma_1} (0,0)\cdot(-1,0)\,\mathrm{d}s\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 ((1-t)^2t^2, \tfrac{2}{3}t(1-t)^3)\cdot(1,1)\,\underbrace{|\dot{\gamma}_2(t)|}_{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 (1-t)^2t^2 + \tfrac{2}{3}t(1-t)^3\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{15}.
\end{aligned}$$

Vi ser at

$$\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} = 2yx^2 = \frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x},$$

og feltet $\mathbf{F}$ er konservativt med potentialfunksjon $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3y^2$. Ettersom kurven γ er lukket, får vi derfor at

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}s = f(0,0) - f(0,0) = 0.$$

Oppgave 6 Finn Jakobimatrisen til avbildningen $\Phi\colon (r,\theta,s) \mapsto (x,y,z)$,

$$\Phi\colon \begin{bmatrix} r \\ \theta \\ s \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} r^2\ \cos(\theta) \\ r^2\ \sin(\theta) \\ s^3 \end{bmatrix},$$

og vis at Φ har en deriverbar invers på området $\{(x,y,z)\colon x^2+y^2>0, z>0\}$.

Løsning Noter at $x = r^2\cos(\theta)$, $y = r^2\sin(\theta)$ og $z = s^3$. Jakobimatrisen til avbildningen Φ gis av

$$\left[\mathrm{D}\Phi\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2r\cos(\theta) & -r^2\sin(\theta) & 0 \\ 2r\sin(\theta) & r^2\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 3s^2 \end{bmatrix},$$

med determinant

$$\det(\mathrm{D}\Phi) = 6r^3\cos^2(\theta)s^2 - (-6r^3\sin^2(\theta)s^2) = 6r^3s^2.$$

Denne er skilt fra null når r og s er skilt fra null, og spesielt da $0 < x^2+y^2 = r^2$ og $0 < z = s^3$. Det følger av det omvendte funksjonsteoremet at Φ har en entydig inverterbar invers kring hvert punkt i mengden

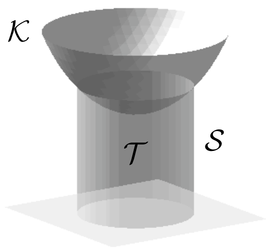
$$\{(x,y,z)\colon x^2+y^2>0, z>0\}.$$

Ettersom dette gjelder alle punkter, gir entydigheten at inversen til Φ er veldefiniert på hele området.

Oppgave 7 La

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ 0 \le z \le 3 - \sqrt{3}\},$$

være sylinderen med radius 1, bunn i $z = 0$ og topp i $z = 3 - \sqrt{3}$, og la



$$\mathcal{K} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 4\}$$

være kulen med radius 2 og sentrum i $(0, 0, 3)$. Flatene $\mathcal{S}$ og $\mathcal{K}$ skjærer hverandre i en sirkel i toppen av $\mathcal{S}$.

a) Beregn volumet av legemet $\mathcal{T}$ begrenset av $\mathcal{S}$, $\mathcal{B}$ og planet $z = 0$.

b) Beregn $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{curl}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}S$ for vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2yz, 0, xy).$$

Løsning Løs ut z i nederkanten av kulen $\mathcal{K}$:

$$z_{\text{topp}} = 3 - \sqrt{4 - x^2 - y^2} = 3 - \sqrt{4 - r^2}$$

Legemet T kan da i sylinderkoordinater beskrives ved

$$0 \le r \le 1, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi, \qquad 0 \le z \le 3 - \sqrt{4 - r^2},$$

og volumet er trippelintegralet over dette område med hensikt på volummålet $\mathrm{d}V = r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}z$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(\mathcal{T}) &= \iiint_{\mathcal{T}} \mathrm{d}V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \int_0^{3-\sqrt{4-r^2}} \mathrm{d}z\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi \int_0^1 r(3 - \sqrt{4 - r^2})\, \mathrm{d}r = 2\pi \left[\frac{3r^2}{2} + \frac{(4 - r^2)^{3/2}}{3} \right]_0^1 \\
&= 2\pi \left(\frac{3}{2} + \frac{3^{3/2}}{3} - \frac{8}{3} \right) = 2\pi \left(\sqrt{3} - \frac{7}{6} \right) \approx 0.57.
\end{aligned}$$

For (b), kan vi for eksempel bruke Stokes setning $\iint_S \mathrm{curl}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}S = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, \mathrm{d}s$ med randen

$$\begin{aligned}
\partial\mathcal{S}_{\text{bunn}} &: \quad \{r = 1, z = 0, 0 \le \theta \le 2\pi\}, \\
\partial\mathcal{S}_{\text{topp}} &: \quad \{r = 1, z = 3 - \sqrt{3}, 0 \le \theta \le 2\pi\},
\end{aligned}$$

orientert (sett fra positiv z-akse) moturs i bunn og medurs i toppen.

På bunnen parametriserer vi

$$\gamma_{\text{bunn}}(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0), \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

$$\mathbf{T}_{\text{bunn}} = (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0), \qquad \mathrm{d}s = |\dot{\gamma}_{\text{bunn}}(\theta)|\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta,$$

slik at

$$\mathbf{F}|_{\gamma_{\text{bunn}}} \cdot \mathbf{T}_{\text{bunn}} = (0, 0, \cos(\theta)\sin(\theta)) \cdot (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0) = 0.$$

På toppen velger vi i stedet

$$\gamma_{\text{topp}}(\theta) = (\cos(-\theta), \sin(-\theta), 3 - \sqrt{3}), \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

med

$$\mathbf{T}_{\text{topp}} = (\sin(-\theta), -\cos(-\theta), 0), \qquad \mathrm{d}s = |\dot{\gamma}_{\text{topp}}(\theta)|\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta,$$

og får (med variabelskiftet $\tau = -\theta$) at

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial \mathcal{S}_{\text{topp}}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, \mathrm{d}s \\
&= -\int_0^{-2\pi} (2(3-\sqrt{3})\sin(\tau), 0, \cos(\tau)\sin(\tau)) \cdot (\sin(\tau), -\cos(\tau), 0)\, \mathrm{d}\tau \\
&= -2(3-\sqrt{3}) \int_0^{-2\pi} \sin^2(\tau)\, \mathrm{d}\tau \\
&= 2(3-\sqrt{3})\pi.
\end{aligned}$$

Formler og konvensjoner

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) = \varrho\cos(\theta)\sin(\varphi), & 0 &\le r, \varrho \\ y &= r\sin(\theta) = \varrho\sin(\theta)\sin(\varphi), & 0 &\le \theta < 2\pi \\ z &= z \qquad\;\;\; = \varrho\cos(\varphi), & 0 &\le \varphi \le \pi. \end{aligned}$$

$$\mathrm{d}s = |\mathbf{r}'(t)|\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}S = |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$(\mathrm{d}S = |(z_x, z_y, -1)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{for} \quad z = z(x,y))$$

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \varrho^2\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{r}'(s)\,\mathrm{d}s = \mathbf{T}\,\mathrm{d}s = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}|\mathbf{r}'(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$(\mathrm{d}\mathbf{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = (\tfrac{dx}{dt}, \tfrac{dy}{dt})\mathrm{d}t \quad \text{for} \quad \mathbf{r} = (x,y))$$

$$\mathbf{curl}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\tfrac{\partial F_3}{\partial x_2} - \tfrac{\partial F_2}{\partial x_3}, \tfrac{\partial F_1}{\partial x_3} - \tfrac{\partial F_3}{\partial x_1}, \tfrac{\partial F_2}{\partial x_1} - \tfrac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)$$

$$\iint_A \left(\tfrac{\partial Q}{\partial x} - \tfrac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}A = \int_{\partial A} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

$$\iiint_V \mathrm{div}(\mathbf{F})\,\mathrm{d}V = \iint_{\partial V} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$$

$$\iint_S \mathbf{curl}(\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \int_{\partial S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}s$$