NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA1103 Flerdimensjonal analyse**

Faglig kontakt under eksamen: Mats Ehrnstrøm

Tlf: 735 917 44

Eksamensdato: 22. mai 2018

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt (Casio fx-82ES PLUS, Casio fx-82EX, Citizen SR-270X, Citizen SR-270X College, Hewlett Packard HP30S).

Annen informasjon:
Eksamen innholder 10 deloppgaver, alle med samme vekting. Les igjennom samtlige oppgaver for du begynner; den opplevde vanskelighetsgraden er ikke nødvendigvis i stigende rekkefølge. Skriv tydelig og entydig, og motiver dine beregninger/beviser. Dersom en metode eller setning angis i oppgaven skal denne brukes, ellers er valget av bevis/metode fritt. Spør dersom noe er uklart.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 10

Antall sider vedlegg: 1

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppgave 1 Laplace-operatoren er definert ved $\Delta \overset{def.}{=} \nabla \cdot \nabla = \partial_x^2 + \partial_y^2$. La $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ være en to ganger kontinuerlig deriverbar funksjon som kun avhenger av $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

Bruk kjerneregelen til å vise at

$$\Delta f = \frac{\partial^2 g}{(\partial r)^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r},$$

der $g(r) = f(x, y)$.

Løsning Med $r^2 = x^2 + y^2$ er $2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x$, slik at $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$, og tilsvarende er $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$ grunnet symmetri i (x, y) i r. Ifølge kjerneregeln er da

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{\partial g}{\partial r},$$

og

$$\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\frac{\partial g}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{x}{r^2}\frac{x}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \left(\frac{x}{r}\right)^2\frac{\partial^2 g}{(\partial r)^2},$$

med tilsvarende uttrykk for $\frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}$, igjen grunnet symmetri. Summasjon gir nå at

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{x^2}{r^3}\frac{\partial g}{\partial r} + \left(\frac{x}{r}\right)^2\frac{\partial^2 g}{(\partial r)^2} \\
&\quad + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{y^2}{r^3}\frac{\partial g}{\partial r} + \left(\frac{y}{r}\right)^2\frac{\partial^2 g}{(\partial r)^2} \\
&= \frac{\partial^2 g}{(\partial r)^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}.
\end{aligned}$$

Oppgave 2 Gitt kurven $\gamma = \{(\cos(t), \sin(t)) \colon t \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$ og en funksjon

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} + (x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}},$$

beregn kurveintegralet

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, \mathrm{d}s$$

for vektorfeltet $\mathbf{F} = \nabla f$.

Løsning Vektorfeltet $F = \nabla f$ er konservativt, og dermed er kurvintegralet (sirkulasjonen) kun avhengig av kurvens start- og endpunkt. Ettersom f er radiell får vi derfor at $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, \mathrm{d}s = f(1,0) - f(0,1) = 0$.

Et alternativ er å beregne kurvintegralet eksplisitt.

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2)^s = 2sx(x^2 + y^2)^{s-1}$$

for alle $s \geq 1$, slik at

$$\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y) = (3r + 5r^3)(x, y),$$

der vi har forkortet $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$. Ettersom kurven γ er en del av enhetssirkelen $x^2 + y^2 = 1$ er dess (utåtrettede) enhetsnormal (x, y) og (positivt orienterte) enhetstangent $\mathbf{T} = (y, -x)$. Da blir

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, \mathrm{d}s = \int_\gamma (3r + 5r^3)(x, y) \cdot (y, -x) \, \mathrm{d}s = 0.$$

Dette gjelder uansett hvor langt vi integrerer lengs med kurven γ.

Oppgave 3 La

$$D = \{(x, y) \colon (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$$

og betrakt funksjonen $f \colon D \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x, y) = xy \sin(\tfrac{1}{x}), \qquad x \neq 0$$

og satt til $f(0, 0) = 0$ i origo.

a) Vis at $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ eksisterer og at f er kontinuerlig i origo.

Løsning Det gjelder at

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = |xy \sin(\tfrac{1}{x})| \leq |xy| \leq |(x, y)|^2 \to 0$$

når $|(x, y)| \to 0$ (alt. $|f(x, y) - f(0, 0)| < \varepsilon$ dersom $|(x, y)| \leq \delta$ med $\delta = \sqrt{\varepsilon}$). Ettersom $f(0, 0) = 0$ viser dette at f er kontinuerlig i origo.

b) Det indre av D er det åpne området $\{(x-1)^2 + y^2 < 1\}$. Vis at f er kontinuerlig deriverbar i det indre av D, og finn alle kritiske punkter til f i samme område.

Løsning I det indre av D gjelder $0 < x < 2$. Ifølge kjerneregeln er de partiellderiverte til f der

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) - \frac{y}{x^2}\cos\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

og

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \sin\left(\tfrac{1}{x}\right).$$

Ettersom disse er produkter og summer av kontinuerlige funksjoner for $x > 0$ er f kontinuerlig differentierbar i det indre av D.

Et kritiskt punkt er et punkt for hvilket $\nabla f(x,y) = 0$. Vi betrakter først $\frac{\partial f}{\partial y}$ som er null for $0 < x < 2$ nøyaktig når $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, d v s når $x = \frac{1}{n\pi}$, $n = 1, 2, \ldots$ I dette tilfelle er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \pm n^2\pi^2 y,$$

som er null for $y = 0$ (og aldri ellers). De kritiske punktene er altså

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n\pi}, 0\right), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

c) Vis at f tar sin maksimumsverdi på D i et punkt (x, y) på randen av D, der

$$2\lambda y = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

for en $\lambda \in \mathbb{R}$ (det er ikke nødvendig å finne dette punktet).

Løsning Ettersom f er kontinuerlig på D finnes et maksimum, enten på randen $\partial D = \{(x-1)^2 + y^2 = 1\}$ eller i et kritiskt punkt i det indre av D.

Alle kritiske punkter i det indre ligger ifølge (b) på linjen $y = 0$, der f triviellt er 0. Men i punktet $(1, 1)$ er f strikt positiv, så maksimum må ligge på ∂D.

Randen er implisitt gitt ved $g(x, y) = (x-1)^2 + y^2 - 1 = 0$ så vi kan bruke Lagranges multiplikatormetode. Vilkåret $\nabla f \parallel \nabla g$ impliserer da at enten må $y = 0$, eller eksisterer et $\lambda \in \mathbb{R}$ med

$$2\lambda y = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

i et maksimum (x, y). Da $y = 0$ allerede er utelukket, intreffer maksimum når $2\lambda y = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Oppgave 4 Betrakt mengden

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + 2y^2 + 2z^4 = 8,\ z > 0\}.$$

a) Finn tangentplanet til flaten $\mathcal{S}$ i punktet $(2, 1, 1)$. Planet skal uttrykkes på formen $Ax + By + Cz = D$.

Løsning $\mathcal{S}$ er nivåflaten $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2z^4 - 8 = 0$. Gradienten til f er derfor normal mot tangentplanet til $\mathcal{S}$ i ethvert punkt. Med

$$\mathbf{n} = \nabla f(2, 1, 1) = (4, 4, 8),$$

er tangentplanet gitt ved $(x - 2, y - 1, z - 1) \cdot \mathbf{n} = 0$, d v s

$$x + y + 2z = 5.$$

b) Beregn sirkulasjonen $\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ langs randen av $\mathcal{S}$ for et vektorfelt med $\mathbf{curl}(\mathbf{F}) = (2y, -x, 1)$. Her er randen $\partial\mathcal{S}$ orientert mot klokka sett fra positiv z-akse.

Ettersom vi skal beregne $\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ er vi frie å omforme $\mathcal{S}$ til en annen stykkevis glatt flate $\tilde{\mathcal{S}}$ med samme rand. Ettersom $\partial\mathcal{S} = \{(x, y, z) \colon z = 0, x^2 + 2y^2 = 8\}$ er et enkelt valg ellipsen

$$\tilde{\mathcal{S}} = \{(x, y, z) \colon z = 0, x^2 + 2y^2 < 8\}$$

med uppåtrettet enhetsnormal $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$. Vi har da ifølge Stokes at

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_{\partial\tilde{\mathcal{S}}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \\ &= \iint_{\tilde{\mathcal{S}}} \mathbf{curl}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}S \\ &= \iint_{\tilde{\mathcal{S}}} 1\, \mathrm{d}S\end{aligned}$$

ettersom randen $\partial\mathcal{S}$ er antatt orientert mot klokka sett fra positiv z-akse. Det gjenstår bare at notere at

$$\iint_{\tilde{\mathcal{S}}} 1\, \mathrm{d}S = 4\sqrt{2}\pi,$$

er arealet av en ellips med halvaksler $a = 2\sqrt{2}$ og $b = 2$.

Alternativt kan man beholde $\mathcal{S}$ og se at $\mathbf{curl}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}S$ uansett forenkles til $\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$. Ettersom $\mathcal{S}$ er nivåflaten $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2z^4 - 8 = 0$ er

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla f(x, y, z)}{|\nabla f(x, y, z)|} = \frac{(2x, 4y, 8z^3)}{|\nabla f(x, y, z)|},$$

enhetsnormalen ut fra $\mathcal{S}$ sett fra origo (dette stemmer med orienteringen angitt i oppgaven). $\mathcal{S}$ kan også parameteriseres som en graf ved (x, y)[1], og for grafer gjelder

$$\mathrm{d}S = |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y|\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \sqrt{1 + \left(\tfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\tfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \left|\left(\tfrac{\partial z}{\partial x}, \tfrac{\partial z}{\partial y}, 1\right)\right| \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y, = |\nabla f(x, y, z)|/|f_z|\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

der den siste likheten følger fra kjerneregeln. Da blir

$$\mathbf{curl}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}S = \frac{8z^3}{|\nabla f(x, y, z)|} \frac{|\nabla f(x, y, z)|}{|f_z(x, y, z)|}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

og man trenger slik ovenfor bare notere/beregne arealet av en ellips:

$$\iint\limits_{0 \leq x^2 + 2y^2 \leq 8} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 4\sqrt{2}\pi$$

[1] Se f.eks. Oppgave 5, eller løs eksplisitt for z og skriv $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \colon x^2 + 2y^2 \leq 8, z = \tilde{z}(x, y)\}$ med $\tilde{z}(x, y) = \left(\frac{1}{2}(8 - x^2 - 2y^2)\right)^{1/4}$. Man trenger ikke formeln i den videre løsningen.

Oppgave 5 Bruk implisitt funksjonsteorem til å vise at det rundt ethvert punkt (x, y, z) på $\mathcal{S}$ i Oppgave 4 finnes en deriverbar parametrisering r av $\mathcal{S}$.

Løsning La $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2z^4 - 8$. Da er $f = 0$ på $\mathcal{S}$ og er i tillegg overalt (uendelig) deriverbar. Vi har

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 8z^3 > 0, \qquad z > 0,$$

hvilket garanterar at, for hvert fiksert par (x_0, y_0), er $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, \cdot)\colon (0, \infty) \to (0, \infty)$ inverterbar. Ifølge implisitte funksjonsteoremet finnes det en (uendelig) deriverbar funksjon $\tilde{z}\colon (x, y) \mapsto \tilde{z}(x, y)$, definiert i et omegn til (x_0, y_0) slik at

$$f(x, y, \tilde{z}(x, y)) = 0.$$

Vi har dermed (lokalt) parametrisert $\mathcal{S}$ ved $\mathbf{r}\colon (x, y) \mapsto (x, y, \tilde{z}(x, y))$, hvilken er deriverbar i alle komponenter.

Kommentar: Oppgave 5 beviser noe som er implissit antatt i Oppgave 4, nemlig at $\mathcal{S}$ faktisk er en flate.

Oppgave 6 En ellipsoide med halvakser $a, b, c > 0$ er gitt ved

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1.$$

a) Still opp et trippelintegral for volumet inneholdt i denne ellipsoiden. Beregn integralet.

Man kan oppnå maksimalt 6/10 poeng på denne deloppgaven dersom man utfører beregningen for det spesielle tilfellet $a = b = c$ når ellipsoiden er en kule med radius a.

Løsning En parameterisering av legemet til ellopsoiden kan oppnås ved å skalere vanlige kulekoordinater:

$$\begin{aligned} x &= a\varrho\cos(\theta)\sin(\varphi), \\ y &= b\varrho\sin(\theta)\sin(\varphi), \\ z &= c\varrho\cos(\varphi), \end{aligned}$$

for $\varrho \in [0, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi)$ og $\varphi \in [0, \pi]$. Jakobideterminanten $\det(\Phi')$ for avbildningen $\Phi\colon (\varrho, \theta, \varphi) \mapsto (x, y, z)$ er $abc\,\varrho^2\sin(\varphi)$. Volumet gis dermed ved trippelintegralet

$$\begin{aligned} \iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 abc\,\varrho^2\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\ &= abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1\varrho^2\,\mathrm{d}\varrho = \frac{4\pi}{3}abc, \end{aligned}$$

der V betegner legemet innholdt av ellipsoiden.

Et alternativ er å sette $\tilde{x} = \frac{x}{a}$, $\tilde{y} = \frac{y}{b}$, $\tilde{z} = \frac{z}{c}$ (slik ovenfor), men deretter jobbe videre i kartesiske koordinater. Det gir, via Jakobimatrisen for avbildningen $(x, y, z) \mapsto (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$,

$$\iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = abc\iiint_B \mathrm{d}\tilde{x}\,\mathrm{d}\tilde{y}\,\mathrm{d}\tilde{z},$$

der B er enhetskulen med radius 1. Denne kan beregnes eller skrives ned. Noen fler detaljer må gis, slik i løsningen ovenfor.

b) Still opp et integral for overflatearealet av samme ellipsoide i tilfellet $a = b$ (med flatemålet utregnet for ditt valg av parametrisering). Beregn dette integralet når $a = b = c = \pi$.

Løsning Parameteriseringen i løsningen til (a), men nå med $\varrho = 1$ fiksert, beskriver overflaten til ellipsoiden. La altså

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = (a\cos(\theta)\sin(\varphi), b\sin(\theta)\sin(\varphi), c\cos(\varphi)),$$

der $\theta \in [0, 2\pi)$, $\varphi \in [0, \pi]$. Vi ønsker bestemme

$$\iint_E \mathrm{d}S = \iint_E |\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi| \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi,$$

der E betegner ellopsoiden. I tilfellet $a = b$ gir en enkel beregning at

$$|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi|^2 = a^2 \sin^2(\varphi) \left(a^2 \cos^2(\varphi) + c^2 \sin^2(\varphi) \right),$$

slik at

$$\operatorname{Area}(E) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} a \sin(\varphi) \left(a^2 \cos^2(\varphi) + c^2 \sin^2(\varphi) \right)^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta.$$

Når $a = b = c = \pi$, reduseres dette til

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \pi^2 \sin(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta = \pi^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \sin(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi = 4\pi^3.$$

Formler og konvensjoner

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) = \varrho\cos(\theta)\sin(\varphi), & 0 &\le r, \varrho \\ y &= r\sin(\theta) = \varrho\sin(\theta)\sin(\varphi), & 0 &\le \theta < 2\pi \\ z &= z \qquad\;\;\, = \varrho\cos(\varphi), & 0 &\le \varphi \le \pi. \end{aligned}$$

$$\mathrm{d}s = |\mathbf{r}'(t)|\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}S = |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$(\mathrm{d}S = |(z_x, z_y, -1)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{for} \quad z = z(x,y))$$

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z = \varrho^2\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\varrho$$

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{r}'(s)\,\mathrm{d}s = \mathbf{T}\,\mathrm{d}s = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}|\mathbf{r}'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

$$(\mathrm{d}\mathbf{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = (\tfrac{dx}{dt}, \tfrac{dy}{dt})\mathrm{d}t \quad \text{for} \quad \mathbf{r} = (x,y))$$

$$\mathrm{curl}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\tfrac{\partial F_3}{\partial x_2} - \tfrac{\partial F_2}{\partial x_3}, \tfrac{\partial F_1}{\partial x_3} - \tfrac{\partial F_3}{\partial x_1}, \tfrac{\partial F_2}{\partial x_1} - \tfrac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)$$