Et utvalg av eksamensoppgaver i lignende kurs.

EKSAMEN 20. DESEMBER 1985

√ Oppgave 3

La A være en 3x3-matrise. Anta at detA =1 og at alle elementer i A er hele tall. Vis at da må alle elementene i A^{-1} være hele tall.

√ Oppgave 4

Finn alle 4. røtter til det komplekse tallet 1+i.(dvs.finn alle komplekse tall w som tilfredsstiller likningen $w^4 = 1+i$.)

EKSAMEN 19. DESEMBER 1986

Oppgåve 3

a) Rekn ut A^n for n = 2, 3, 4 når

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Lat A vere ei n x n - matrise slik at $A^2 = -I_n$. Vis at da må n vere eit like tal og det $A = \pm 1$.

c) Lat A vere ei 2 x 2 - matrise slik at $A^2 = -I_2$. Vis at da er det $A = 1$.

Eksamen i Ma 7 NYNORSK
19. desember 1986

Framhald:

Oppgåve 4

Løys likningssystemet

$$\begin{aligned} (1+i)z_1 &+ 2z_2 = 1 \\ -2z_1 &+ (1-i)z_2 = 1 \end{aligned}$$

og merk av z_1 og z_2 i det komplekse planet.

s. 3)

Eksamen i Ma 7

18. desember 1987

NYNORSK

Oppgåve 2

a) Rekn ut determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

b) For $n \geq 3$ rekn ut $n \times n$ -determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 2 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Oppgåve 3

Løys likningssystemet

$$\begin{aligned} x + y \qquad\qquad &= 1 \\ y + z \qquad &= 1 \\ z + u &= 1 \\ -x \qquad\qquad + u &= 1 \end{aligned}$$

a) ved Gauss - Jordan sin metode og

b) ved Cramer sin regel.

EKSAMEN 18. DESEMBER 1987 (s. 4)

Oppgåve 5

Finn alle komplekse tal z slik at

$$(z-i)^2 = i$$

Oppgåve 6

La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vis at $B^3 = 0$ og at $A^{-1} = I-B+B^2$.

(0 = nullmatrisa, I = identitetsmatrisa).

Eksamen i Ma 7 BOKMÅL
11. mai 1987

Fortsetter:

Oppgave 3

La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Finn det(A) , adj(A) og A^{-1} .

b) Løs likningssystemet

$$A\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 4

a) Skriv $-1 + \sqrt{3}i$ på polarform.

b) Finn alle komplekse tall z slik at

$$z^3 = (-1 + \sqrt{3}i)^4 .$$

Skisser løsningene i det komplekse planet.

Oppgave 2

a) Løs ligningen

$$z^3 = 8i$$

Angi svaret både i polarkoordinater og på koordinatform . Skisser løsningen i det komplekse planet.

b) Løs ligningssystemet

$$(1 + 2i)x_1 + 2\sqrt{2}x_2 = 1 - 2i$$

$$x_1 - \sqrt{2}x_2 = 1 + 3i$$

Oppgave 3

En kvadratisk matrise A kalles symmetrisk hvis $A^t = A$ og skjev-symmetrisk hvis $A^t = -A$.

a) Vis at for alle kvadratiske matriser A er

$A + A^t$ symmetrisk og

$A - A^t$ skjev-symmetrisk.

b) Bruk dette til å vise at en generell kvadratisk matrise kan skrives som en sum av en symmetrisk og en skjev-symmetrisk matrise.

Eksamen i Ma 7
11. mai 1988

BOKMÅL

Fortsetter:

Oppgave 4

I denne oppgaven er A og B to invertible $n \times n$-matriser. $\operatorname{adj}(A)$ betegner den adjungerte matrise. Vis at

a) $\det(\operatorname{adj}(A)) = \det(A)^{n-1}$

b) $\operatorname{adj}(AB) = \operatorname{adj}(B)\operatorname{adj}(A)$

c) $\operatorname{adj}(A^{-1}) = \operatorname{adj}(A)^{-1}$

Oppgave 5

La $z_1 \neq 1$ være en løsning av likningen

(*) $z^5 = 1$.

Sett $z_n = z_1^n$ for $n = 2, 3, 4, 5$.

a) Vis at da er z_2, z_3, z_4 og z_5 de andre løsningene av (*).

b) Vis at $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 0$.

EKSAMEN 11. MAI 1989

Oppgave 3

a) Gitt ligningssystemet

$$\begin{aligned} (a^2-1)x - a^2y \qquad &= 1 - a^2 \\ ay + az &= a + 1 \\ (a^2-1)x - a^2y + z &= 0 \end{aligned}$$

Avgjør for hvilke a ligningssystemet har løsning og når det ikke har løsning. Hvis ligningssystemet har løsning, avgjør om det har entydig løsning eller ikke.

b) Løs ligningssystemet når $a = -1$.

EKSAMEN 14. DESEMBER 1989

Oppgave 3

Løs den komplekse ligningen

$$z^6 = 1.$$

Skriv svaret på polar form og på formen a+ib. Skisser løsningene i det komplekse planet.

Oppgave 4

La A være en nxn matrise og B en mxm matrise.

La $M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$, der 0 er nullmatriser av passende størrelse.

a) Vis at $M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$

der 0 fortsatt er nullmatriser av passende størrelse.

b) Bruk dette til å vise at $\det(M) = \det(A)\det(B)$.

EKSAMEN 21 MAI 2003

Oppgave 2

a) La $Q(x,y) = 7x^2 + 3y^2 - 2xy$.
Avgjør hva slags kurve $Q(x,y) = 1$ er. Begrunn svaret.

b) Finn maksimums- og minimumsverdien til $Q(x,y)$ når $x^2 + y^2 = 1$.

Oppgave 5

La A være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Finn egenverdiene til A og en basis for $\mathbb{C}^2$ som diagonaliserer A.

EKSAMEN 31. MAI 2002

Oppgave 4

a) La $Q(x,y) = \frac{3}{2}x^2 - xy + \frac{3}{2}y^2$. Avgjør hva slags kurve $Q(x,y) = 1$ er. Begrunn svaret.

b) Finn maksimums- og minimumsverdien til $Q(x,y)$ når $x^2 + y^2 = 4$.

Oppgave 5

a) La P være matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Vis at P er invertibel og finn P^{-1}.

EKSAMEN 1. JUNI 1999

Oppgave 4

La

$$M = \begin{bmatrix} p & q \\ 1-p & 1-q \end{bmatrix}$$

med $p, q \in [0,1]$.

a) Vis at egenverdiene til M er $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = p - q$ og finn en matrise P som diagonaliserer M.

b) Vis at hvis $|p - q| < 1$ vil

$$M^n \to \frac{1}{1+q-p} \begin{bmatrix} q & q \\ 1-p & 1-p \end{bmatrix} \text{ når } n \to \infty.$$

EKSAMEN 2 JUNI 1994

S. 11)

Oppgave 3

La $T : R^3 \to R^3$ være en lineær transformasjon gitt ved

$$T(x, y, z) = (2x - y - z, x - z, -x + y + 2z)$$

- a) La A være matrisen til T med hensyn på den vanlige basisen for R^3. Finn A.
- b) Finn egenverdiene til A.

EKSAMEN 3. DESEMBER 1993

Oppgave 4

La

$$A = \begin{bmatrix} 15 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 13 \end{bmatrix}$$

a) Forklar hvorfor A er ortonormalt diagonaliserbar.

b) Finn egenverdiene og egenvektorene til A.

c) Finn en ortogonal matrise som diagonaliserer A.

d) Bestem hvilket kjeglesnitt som er gitt ved

$$15x^2 - 2\sqrt{3}xy + 13y^2 - 12x + 12\sqrt{3}y - 36 = 0$$

Tegn kjeglesnittet.

EKSAMEN 25 MAI 1990

Oppgave 6

a) Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x + iy - (1+i)z &= 1 \\ x - 2y + iz &= 0 \\ -ix + y - (2-i)z &= 1 \end{aligned}$$

for $x, y, z \in \mathbf{C}$.

Svarene skal gis på formen $a + bi$, $a,b \in \mathbf{R}$.

b) Løs ligningen

$$z^2 + 2z = i$$

for $z \in \mathbf{C}$.

Skisser løsningene i det komplekse plan.

EKSAMEN 5 JUNI 1989

Oppgave 2

a) La $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,5 \\ 0,6 & 0,5 \end{pmatrix}$.

Finn en inverterbar 2x2-matrise P, dens invers P^{-1} og en 2x2 diagonalmatrise D slik at $P^{-1}AP = D$.

b) En by med 220.000 stemmeberettigede innbyggere har 2 partier U og V, der i dag 50.000 stemmer på U og 170.000 på V. Hvert år skifter 60% parti fra U til V og 50% fra V til U.
Hvordan blir fordelingen mellom partiene etter 4 år? Hvordan blir fordelingen i det lange løp?

26. MAI 1987

Oppgave 5

La A være en reell n x n - matrise. Vis at da gjelder:

$$A^tA = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

(0 = nullmatrisen)

2 MAI 1986

Oppgave 3

La $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Finn en ortogonal matrise P med det P = 1 og en diagonalmatrise D slik at $D = P^tAP$. Avgjør så om kjeglesnittet $5x^2 + 4xy + 5y^2 = 9$ er en ellipse, parabel eller hyperbel.

1. JUNI 2001

MNFMA108 Lineær Algebra *Side 2 av 3*

Oppgave 2

La r være et naturlig tall ($r \in \{1,2,3,\dots\}$)

Betrakt matrisa

$$E_r = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ og la}$$

$T_r = -(E_r^{-1})^T E_r$.

a) Regn ut og verifiser at

$$T_r = \begin{pmatrix} -1 & r \\ -r & r^2-1 \end{pmatrix}.$$

b) Avgjør for hvilke r matrisen T_r kan diagonaliseres som reell matrise.

Oppgave 2

a) La A være matrisa $A = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix}$. Diagonaliser matrisa A.

b) Ved presidentvalget i USA i 1960 ble det avlagt 6 800 000 stemmer i staten Adirolf. Den republikanske kandidaten fikk 71 % av stemmene, mens den demokratiske kandidaten fikk 29 % av stemmene.

Det viser seg at det ved hvert presidentvalg blir avlagt 6 800 000 stemmer i Adidolf. For enkelhets skyld antar vi at det er de samme som stemmer ved alle valg. Imidlertid så stemmer 30 % av de som stemte republikansk ved et valg, demokratisk ved neste valg. Det samme skjer hos demokratene, 30 % av de som stemte demokratisk ved forrige valg, stemmer republikansk ved neste valg.

Hvilken kandidat vinner valget i 2000 i denne staten, og med hvor mange stemmer? (Det er valg hvert 4. år i USA).

Hvordan vil fordelingen mellom de to partiene bli i det lange løp i denne staten?

Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Carl Fredrik Berg
Telefon: 7359 0482

Eksamen i MA1201 Lineær algebra og geometri

Onsdag 3. desember 2003
Kl. 09.00-13.00

Hjelpemidler: Ingen hjelpemidler tillatt

Hvert av de 8 punktene teller likt.

Alle svar skal begrunnes. Du må ta med så mye mellomregninger at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

a) Finn redusert trappeform for matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ -2 & 6 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ og løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 0 \\ 2x + 3y + 2z &= 0 \\ -2x + 6y + z &= 6 \end{aligned}$$

b) La A_a være matrisen $\begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$. Beregn $\det A_a$, og avgjør for hvilke a matrisen A_a er inverterbar.

Finn A_a^{-1} for $a = -3$.

c) For hvilke a har ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + ay + z &= 0 \\ 2x + 3y + 2z &= 0 \\ -2x + 6y + z &= 6 \end{aligned}$$

ingen løsninger, nøyaktig én løsning, uendelig mange løsninger?

Oppgave 2

Vis at $\frac{z_1}{z_2 z_3} = 1 + i$, når $z_1 = 15 + 5i$, $z_2 = 2 + i$ og $z_3 = 3 - 4i$. Skriv $1 + i$ på polarform, og finn alle 4. røtter av $1 + i$.

Oppgave 3

a) Finn egenverdiene til matrisen $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Finn en ortogonal matrise P slik at $P^{-1}AP = D$, der D er en diagonalmatrise.

b) Hvilket kjeglesnitt er gitt ved ligningen

$$3x^2 + 3y^2 + 2xy = 9$$

Tegn en skisse av kjeglesnittet.

Oppgave 4

La A være en $n \times n$-matrise. Hvilke av følgende utsagn er ekvivalent med at $\det A = 0$. Her kreves ingen begrunnelse.

a) Den tilhørende lineærtransformasjon T_A er 1-1

b) $A\underline{x} = \underline{0}$ har uendelig mange løsninger

c) $A^2 = \underline{0}$

d) A er ikke inverterbar

e) A er en elementærmatrise

Oppgave 5

La A være en kvadratisk matrise, og A^T den transponerte matrisen. Vis at vi da har følgende:

$$A \text{ er inverterbar} \Leftrightarrow A^T A \text{ er inverterbar}$$

Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Carl Fredrik Berg
Telefon: 975 05 585

Eksamen i MA1201 Lineær algebra og geometri

Fredag 4. juni 2004
Kl. 09.00-13.00

Hjelpemidler: Ingen hjelpemidler tillatt

Hvert av de 10 punktene teller likt.

Alle svar skal begrunnes. Du må ta med så mye mellomregninger at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

a) Finn redusert trappeform for matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ og løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= -3 \\ 2x + 2y - 4z &= 2 \\ 3x + y - 2z &= 5 \end{aligned}$$

b) La A_a være matrisen $\begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ hvor a er et element i $\mathbb{R}$. Beregn $\det A_a$, og avgjør for hvilke a matrisen A_a er inverterbar.

c) Finn løsningsmengden til $A_a\underline{x} = \underline{b}$, hvor $a = -1$ og $\underline{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Oppgave 2

Finn x i ligningen

$$(-1+\sqrt{3}i)x = (2\sqrt{3}+2i)(1-\sqrt{3}i)$$

Oppgave 3

a) Finn egenverdiene til matrisen $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$. Finn en matrise P slik at $P^{-1}AP = D$, der D er en diagonalmatrise.

b) Regn ut A^n når n er et positivt heltall.

Oppgave 4

La A være en $n \times n$-matrise hvor n er et positivt heltall, og la lineærtransformasjonen $T_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ være gitt ved multiplikasjon med A. Hvilke av følgende utsagn er ekvivalent med at $\det A \neq 0$. Her kreves ingen begrunnelse.

i) A er en symmetrisk matrise

ii) $\det A^T \neq 0$

iii) $A\underline{x} = \underline{b}$ har nøyaktig én løsning for enhver vektor $\underline{b}$

iv) T_A er en en-til-en (en-entydig) lineærtransformasjon

v) bildet til T_A er hele $\mathbb{R}^n$ (dvs. lineærtransformasjonen T_A er på)

Oppgave 5

La $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ være en ortogonal 2×2-matrise over $\mathbb{R}$. Forklar hvorfor søylevektorene $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ er ortogonale og har norm lik 1.

Oppgave 6

a) La A være firkanten i $\mathbb{R}^3$ gitt ved hjørnene $P = (1,3,2), Q = (2,5,4), R = (3,5,5)$ og $S = (4,7,7)$.

Finn arealet av A.

b) La vektorene $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ ligge i $\mathbb{R}^3$, og la matrisa $B = \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \\ \underline{w} \end{bmatrix}$ ha disse vektorene som rader.

Vis at vektorene $\underline{u}, \underline{v}$ og $\underline{w}$ ligger i samme plan hvis og bare hvis $\det B = 0$.