Midtsemester-eksamen i MA1201

Fredag 8/10-2004, 8.15-10.00

Studentnummer:

Oppgave 1: La A være matrisen $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ og la B være matrisen $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$
Hva er $AB - 6B$?

☐ $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 3 & 7 & \frac{1}{2} \\ 12 & 0 & 3 \\ 20 & 4 & 13 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & 18 & 12 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 12 & 12 & 3 \\ 7 & 6 & 12 \\ 22 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

Oppgave 2: Hvor mange løsninger har ligningen $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$ når

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

☐ Ingen ☐ Nøyaktig 1 ☐ Nøyaktig 2 ☐ Uendelig mange

Oppgave 3: Hva er determinanten til matrisen

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & \frac{1}{2} \\ 2 & 6 & 4 \\ -2 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

☐ -173 ☐ $-158\frac{1}{2}$ ☐ $-\frac{158}{2}$ ☐ 158

Oppgave 4: Hva er redusert trappeform av 3×3-matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -8 & 5 \\ -2 & 4 & 2 \\ 5 & -2 & 11 \end{bmatrix}$$

☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Oppgave 5: La A, B og C være vilkårlige $n \times n$-matriser med $n > 1$, og la a, b og c være reelle tall. Hvilke **2** av følgende utsagn er sanne?

☐ $A(B + C) = BA + CA$
☐ $A((b + c)B) = c(AB) + b(AB)$
☐ $A((b - c)B) = c(AB) - b(AB)$
☐ $A + (B + I) = A + B$, hvor I er identitetsmatrisen
☐ $(ab)C = b(aC)$

Oppgave 6: La A være en $n \times n$-matrise. Hvilke **2** av de følgende utsagn er ekvivalent med at A er inverterbar?

- ☐ $A\underline{x} = \underline{0}$ er løsbar
- ☐ A kan skrives som et produkt av elementærmatriser
- ☐ Redusert trappeform av A er $\underline{0}$ (nullmatrisen)
- ☐ $\det(A) \neq 0$
- ☐ $\det(A) \neq \pm 1$

Oppgave 7: La A være en $n \times n$-matrise slik at $A^T A$ ikke er inverterbar. Vi skal vise at A ikke er inverterbar. Hvilke **2** av følgende bevis er korrekte?

- ☐ Da $A^T A$ ikke er inverterbar, har vi $\det(A^T A) = 0$. Vi får da $0 = \det(A^T A) = \det(A^T)\det(A) = \det(A)\det(A)$. Dette gir at $\det(A) = 0$, og derfor er A ikke inverterbar.
- ☐ Anta A er inverterbar. Vi ser da at $A^T = A^{-1}$, så A er symmetrisk, og dermed er $A^T A$ inverterbar.
- ☐ Anta at $A^T A$ er inverterbar. Da er $\det(A^T A) \neq 0$. Dette gir $\det(A^T A) = \det(A^T)\det(A) = \det(A)\det(A) \neq 0$. Da får vi at $\det(A) \neq 0$, og derfor er A inverterbar.
- ☐ Vi har $A^T A = A$. Vi får da $(A^T A)^2 = (A^T)^2 = (A^2)^T$, og dermed er A ikke inverterbar.
- ☐ Anta A er inverterbar. Da eksisterer en matrise B slik at $AB = I = BA$. Da er $(A^T A)(BB^T) = A^T(AB)B^T = A^T I B^T = A^T B^T = (BA)^T = I^T = I$ og $(BB^T)(A^T A) = B(B^T A^T)A = B(AB)^T A = BI^T A = BIA = BA = I$, så $A^T A$ er inverterbar. Dette gir en motsigelse, og dermed er A ikke inverterbar.

Oppgave 8: Finn matrisen A når

$$(A - 2I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -5 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

☐ $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$