Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Fagleg kontakt under eksamen: Idun Reiten
Telefon: 7359 1742

Eksamen i MA1201 Lineær algebra og geometri

Torsdag 9. desember 2004
Kl. 09.00-13.00

Hjelpemiddel: Ingen hjelpemiddel tilatt

Grunngi alle svar. Ta med så mange mellombels utrekningar at måten du reknar på er grei å følgje.

Oppgåve 1

a) Finn redusert trappeform for matrisa $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & -5 & 5 \end{bmatrix}$ og løys likningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 3x - y + 5z &= 2 \\ 4x + y - 5z &= 5 \end{aligned}$$

b) Avgjer kva for verdiar av a som likningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 3x - y + 5z &= 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z &= a + 2 \end{aligned}$$

(i) har inga løysingar? (ii) har nøyaktig ei løysing? (iii) har uendeleg mange løysingar?

Oppgåve 2

Rekn ut kryssproduktet $\underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{v}$ når $\underset{\sim}{u} = (-3, 2, -1)$ og $\underset{\sim}{v} = (0, 5, -1)$.

Finn arealet av trekanten bestemt av punktane $P_1 = (1, -1, 2)$, $P_2 = (-2, 1, 1)$ og $P_3 = (1, 4, 1)$.

Oppgåve 3

Skriv det komplekse talet $4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$ på polarform, og finn alle 3. røter av $4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$.

Oppgåve 4

La $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, og la $T_A \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vere den tilhøyrande lineærtransformasjonen.

Berekn $T_A(2, 3)$, og gi ei geometrisk tolking av T_A.

Oppgåve 5

a) Finn eigenverdiane til matrisa $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, og for kvar eigenverdi, finn ein tilhøyrande eigenvektor.

b) Finn ei matrise P slik at $P^{-1}AP = D$, hvor D er ei diagonalmatrise.
Vis at for heiltal $k \geq 1$ så har vi at $A^k = \frac{3^k - 1}{2}A + \frac{3 - 3^k}{2}I$ (der I er 2×2-identitesmatrisa).

Oppgåve 6

La $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Det oppgjes at for den ortogonale matrisa $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ og diagonalmatrisa $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, så har vi $P^{-1}AP = D$.

Avgjer om kjeglesnittet gitt ved likninga

$$x^2 + y^2 + 4xy = 1$$

er ei ellipse, parabel eller hyperbel, og gi ei skisse av kjeglesnittet.

Oppgåve 7

La A vere ei $n \times n$ matrise slik at $A^2 = A$. Vis at vi da har følgjande:

$$A \text{ er inverterbar } \Leftrightarrow A = I$$

Oppgåve 8

La r vere eit reelt tal, og la A_r vere matrisa

$$A_r = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ r & 1 & 1 & 1 \\ r & r & 1 & 1 \\ r & r & r & 1 \end{bmatrix}$$

Vis at $\det A_r = (1-r)^3$, og avgjer kva for verdiar av r som gjer matrisa A_r inverterbar.

Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Anita Valenta
Telefon: 977 37 661

Eksamen i MA1201 Lineær algebra og geometri

Torsdag 26. mai 2005
Kl. 09.00-13.00

Hjelpemidler: Ingen hjelpemidler tillatt.

Hvert av de 9 punktene teller likt.

Alle svar skal begrunnes. Du må ta med så mye mellomregninger at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

a) Finn redusert trappeform for matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ og løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

b) For hvilke t har ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= t + 1 \\ 3x + 6y + (3t^2 - \frac{15}{2})z &= 0 \end{aligned}$$

ingen løsning, nøyaktig en løsning, uendelig mange løsninger?

Oppgave 2

a) Gitt to komplekse tall z og w, la A være matrisen $A = \begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix}$, der $\overline{z}$ og $\overline{w}$ er kompleks konjugerte til hhv. z og w. Vis følgende påstand: Hvis matrisen A er forskjellig fra $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, så er determinanten til A et positivt reelt tall.

b) Skriv $1 - i$ på polarform og finn alle 3. røtter av $1 - i$.

Oppgave 3

a) Finn egenverdiene til matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. Finn en matrise P slik at $P^{-1}AP = D$, der D er en diagonalmatrise.

b) Regn ut A^n når n er et positivt heltall.

c) Er matrisen A inverterbar? Vis at en inverterbar matrise har en entydig invers.

Oppgave 4

La $T_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ være projeksjonen ned på x-aksen og la $T_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ være rotasjonen $90°$ mot klokka. Beskriv T_1 og T_2 med standard matriser. Er $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$?

Oppgave 5

Finn en ligning som beskriver planet som inneholder punktene $P_1(-1, 2, 5)$, $P_2(2, 1, 4)$ og $P_3(1, 1, 0)$.