**Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet**
**Institutt for matematiske fag**



Fagleg kontakt under eksamen: Tore August Kro
Telefon: (735) 91827

# Eksamen i MA1201 Lineær algebra og geometri

Mandag 12. desember 2005
Tid: 09:00 – 13:00

Hjelpemiddel: Ingen hjelpemiddel tillatt.

Kvart av dei 10 punkta tell likt.

Grunngje alle svar. Ta med så mange mellomrekningar at måten du reknar på er grei å følje.

## Oppgåve 1

**a)** Finn redusert trappeform for matrisa $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ og løys likningssystemet

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = 3 \\ 4x & + & 7y & + & 2z & = 1 \\ 3x & + & 5y & - & 2z & = -3 \end{array}$$

**b)** Avgjer kva for verdiar av $a$ som gjer at likningssystemet

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = 3 \\ 4x & + & 7y & + & 2z & = 1 \\ 3x & + & 5y & + & az & = -3 \end{array}$$

har inga løysing, nøyaktig ei løysing, uendeleg mange løysingar?

**Oppgåve 2**

Skriv $w = 2 - 2\sqrt{3}i$ på polarform og finn 2. røtene til w. Løys likninga $(z+2)^2 = 2 - 2\sqrt{3}i$.

**Oppgåve 3**

**a)** Finn eigenverdiane til matrisa $A = \begin{bmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{bmatrix}$, og finn dei tilhøyrande eigenvektorane. Normaliser desse eigenvektorane. Set opp ei ortogonal matrise $P$ slik at $P^T AP = D$ er diagonal. Er den kvadratiske forma $9x^2 - 24xy + 16y^2$ positivt definitt?

**b)** Avgjer om kjeglesnittet gjeve ved likninga

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 + 20x + 15y = 0$$

er ein ellipse, parabel eller hyperbel, og tekn ei skisse av løysingsmengda.

**Oppgåve 4**

La $P = (3, -1, -2)$, $Q = (1, -1, -1)$ og $R = (-1, 0, 1)$.

**a)** Finn arealet av trekanten med hjørne i $P$, $Q$ og $R$.

**b)** Avgjer om punktet $S = (-1, 3, 4)$ ligg i planet gjeve av punkta $P$, $Q$ og $R$.

**Oppgåve 5**

Ein transformasjon $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kan gjes ved

$$T(x, y) = (f(x, y), g(x, y)) \quad , \tag{*}$$

der $f$ og $g$ er reelle funksjonar i to variable.

**a)** La $f(x, y) = y$ og $g(x, y) = 2x - y$. I dette høvet blir $T$, gjeve ved formelen (*), ein lineær transformasjon. Rekn ut $T(1, 0)$ og $T(0, 1)$, og skriv opp standardmatrisa til $T$.

**b)** Gje eit eksempel på ein transformasjon $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som **ikkje** er lineær. Med ditt val av $T$ finn

anten reelle tal $x$, $y$ og $c$ slik at $T(cx, cy) \neq cT(x, y)$,

eller reelle tal $x_1$, $y_1$, $x_2$ og $y_2$ slik at $T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \neq T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2)$.

**Oppgåve 6**

La $A$ vere ei $2 \times 2$ matrise og $P$ ei ortogonal $2 \times 2$ matrise. Syn at $A$ er symmetrisk viss og berre viss $P^{-1}AP$ er symmetrisk.