Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Soud Mohammed (47 25 6145)

EKSAMEN I LINEAR ALGEBRA AND GEOMETRI (MA 1201)

Fredag 2. Juni 2006
Tid: 15:00-19:00 Sensur 2. Juli 2006

Hjelpemidler: Ingen hjelpemidler tillatt

Oppgave 1

a) Finn den reduserte trappeformen til matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 4 & -5 & 8 \\ -3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$.

b) Finn betingelsen som b'ene må tilfredstille for at følgende ligningssystem er konsistent

$$\begin{aligned} x - 2y + 5z &= b_1 \\ 4x - 5y + 8z &= b_2 \\ -3x + 3y - 3x &= b_3. \end{aligned}$$

c) Finn løsningene til ligningssystemet i b) når $b_1 = -1$, $b_2 = -4$ og $b_3 = 3$.

Oppgave 2

a) La z være et komplekst tall. Vis at $(z + \bar{z})/2 = Re(z)$ og $(z - \bar{z})/2i = Im(z)$, der $Re(z)$ er realdelen til z og $Im(z)$ er imaginærdelen.

b) Finn alle 4. røtter av -1. Skriv røttene på formen $a + ib$, der a og b er reelle tall.

Oppgave 3

a) Finn egenverdiene til matrisen $A = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$. Finn en ortogonal matrise P slik at $P^{-1}AP = D$, der D er en diagonalmatrise.

b) Avgjør on kjeglesnittet gitt ved ligningen

$$9x^2 - 4xy + 6y = 45$$

er en ellipse, en parabel eller en hyperbel. Lag en skisse av kjeglesnittet i et xy-koordinatsystem.

Oppgave 4 La A være en $n \times n$-matrise. Hvilke av følgende utsagn er ekvivalent med at $\det A = 0$:

a) A er ikke inverterbar.

b) A er en elementærmatrise.

c) $\det A^T \neq 0$, der A^T betegner den transponerte matrisen.

d) $A\underline{x} = \underline{0}$ har uendelig mange løsninger.

Oppgave 5 La A være trekanten i $\mathbb{R}^3$ gitt ved hjørnene $P = (1, 0, 1)$, $Q = (0, 2, 3)$ og $R = (2, 1, 0)$. Finn arealet av A.

Oppgave 6 La A være en $n \times n$-matrise slik at $A^2 = A$. Vis at A er inverterbar hvis og bare hvis $A = I$, der I er $n \times n$-identitetsmatrisen.