Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Dagfinn F. Vatne 90 13 86 21

EKSAMEN I LINEÆR ALGEBRA OG GEOMETRI (MA1201)
Bokmål

Torsdag 24. mai 2007
Tid: 09:00 – 13:00 Sensur 14. juni 2007

Hjelpemidler:
Ingen tillatte hjelpemidler

Oppgavesettet består av 10 punkter. Alle svar skal begrunnes. Lykke til!

Oppgave 1

a) Finn redusert trappeform for matrisa $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ og løs ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & & & = & 1 \\ -x & + & 3y & - & z & = & -2 \\ 3x & - & 4y & - & 2z & = & 1 \end{array}$$

b) For hvilke reelle verdier av a har ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & & & = & 1 \\ -x & + & 3y & - & z & = & -2 \\ 3x & - & 4y & - & (a^2-6)z & = & a-1 \end{array}$$

ingen løsning, nøyaktig én løsning, uendelig mange løsninger?

Oppgave 2

a) Skriv $1 + \sqrt{3}\, i$ på polarform. Finn $(1 + \sqrt{3}\, i)^4$, også på polarform.

b) Finn alle komplekse tall z slik at $z^3 = (1+\sqrt{3}\, i)^4$. Du kan gi svaret på polarform. Skissér løsningene i det komplekse planet.

Oppgave 3

a) La A være matrisen
$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$
Finn en P slik at $P^{-1}AP = D$, hvor D er en diagonalmatrise. (P trenger ikke å være ortogonal.)

b) Regn ut A^n for positive heltall n.

Oppgave 4 Finn arealet til trekanten med hjørner i punktene $P_1(3,1,2)$, $P_2(2,3,2)$ og $P_3(5,3,-1)$. Finn en ligning for planet som går gjennom disse tre punktene.

Oppgave 5 La $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, og la $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ og $T_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være de tilhørende lineære transformasjonene. Finn standardmatrisen for den sammensatte transformasjonen $T_A \circ T_B$ og regn ut $T_A \circ T_B(1,1,-1)$. Er $T_A \circ T_B$ 1-1?

Oppgave 6

a) La A være en $n \times n$-matrise. Vis at dersom det finnes et positivt heltall k slik at $A^k = \mathbf{0}_{n\times n}$ (matrisen med bare nuller), så er A ikke inverterbar.

b) Er den motsatte implikasjonen sann?