EGENVERDIER FOR 2×2 MATRISER

a) Motiverende eksempel

En by i USA har 10000 innbyggere som stemmer ved valget hvert år. I dag stemmer 8000 for R og 2000 for D. Hvert år går 30% fra R til D og 20% fra D til R. Hva er fordelingen mellom R og D etter 1 år? Etter 5 år? Etter n år? I det lange løp?

Etter 1 år:

$$R\colon 0,7 \cdot 8000 + 0,2 \cdot 2000 = 6000$$
$$D\colon 0,3 \cdot 8000 + 0,8 \cdot 2000 = 4000$$

La $\underline{v}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ angi fordelingen etter n år (dvs. a_n stemmer for R og b_n stemmer for D). Vi har da $\underline{v}_0 = \begin{pmatrix} 8000 \\ 2000 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 6000 \\ 4000 \end{pmatrix} = A\underline{v}_0$, der $A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix}$. Videre får vi $\underline{v}_5 = A^5 \underline{v}_0$ og $\underline{v}_n = A^n \underline{v}_0$.

Vi trenger da en metode for å regne ut A^n. For å gjøre dette trenger vi å undersøke egenverdier og egenvektorer nærmere.

b) Eksempler på egenverdier og egenvektorer

(Se side 100 og 195 for repetisjon).

Eksempel: La $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Får da $\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$, så $\det(\lambda I - A) = \lambda^2$, så 0 er eneste egenverdi for A.

Eksempel: La oss se på matrisa fra del a), dvs. $A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix}$.

1) Egenverdiene: $\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 0,7 & -0,2 \\ -0,3 & \lambda - 0,8 \end{pmatrix} = (\lambda - 0,7)(\lambda - 0,8) - 0,06 = (\lambda - 1)(\lambda - \frac{1}{2})$, så vi får to egenverdier, nemlig $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = \frac{1}{2}$.
2) Egenvektorene: La $\lambda = \lambda_1 = 1$: Betrakt ligningssystemet $(I - A)\underline{x} = \underline{0}$, der $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, dvs. $\begin{pmatrix} 0,3 & -0,2 \\ -0,3 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, noe som gir ligningen $0,3x_1 - 0,2x_2 = 0$. La $x_2 = t \in \mathbb{R}$. Da er $x_1 = \frac{2}{3}t$, og vi har løsningene $\{t \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$. Egenvektorene med egenverdi 1 er da $\{t \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \neq 0 \in \mathbb{R}\}$, f.eks. $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

La nå $\lambda = \lambda_2 = \frac{1}{2}$. Betrakt ligningssystemet $(\frac{1}{2}I - A)\underline{x} = \underline{0}$. Tilsvarende regning som over gi at egenvektorene med egenverdi $\frac{1}{2}$ er $\{t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \mid t \neq 0 \in \mathbb{R}\}$, f.eks. $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

c) Diagonaliserbare matriser

Definisjon. *En 2×2-matrise A over $\mathbb{R}$ er* diagonaliserbar *hvis det fins en inverterbar 2×2-matrise P slik at $P^{-1}AP = D$, der D er en diagonalmatrise, dvs. $D = \begin{pmatrix}d_1 & 0\\0 & d_2\end{pmatrix}$ for $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$.*

Eksempel: La $A = \begin{pmatrix}2 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}$. Da er A diagonaliserbar, for hvis $P = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$, så er P inverterbar siden $\det P \neq 0$, og regning gir at $P^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$, og $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$.

Eksempel: La $A = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$. Da er A ikke diagonaliserbar. Anta at $P = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ er inverterbar, og at $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix}d_1 & 0\\0 & d_2\end{pmatrix}$. Regn ut og få en motsigelse.

Hvorfor er diagonalisering interessant? Når $P^{-1}AP = D$, så har vi $A = PDP^{-1}$, og dermed er $A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$. Ser da at $A^n = PD^nP^{-1}$, og $D^n = \begin{pmatrix}d_1^n & 0\\0 & d_2^n\end{pmatrix}$ når $D = \begin{pmatrix}d_1 & 0\\0 & d_2\end{pmatrix}$. Dermed kan A^n lett beregnes.

Hvordan finner vi P?

Setning 0.1. *La A være en 2×2-matrise. Anta at $\lambda_1 \neq \lambda_2$ er egenverdier for A, og la $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix}v_{11}\\v_{12}\end{pmatrix}$ og $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix}v_{21}\\v_{22}\end{pmatrix}$ være tilhørende egenvektorer. La $P = (\underline{v}_1 \mid \underline{v}_2) = \begin{pmatrix}v_{11} & v_{21}\\v_{12} & v_{22}\end{pmatrix}$. Anta at P er inverterbar. Da har vi $P^{-1}AP = D$, der $D = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\0 & \lambda_2\end{pmatrix}$.*

Bevis. La $A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{21}\\a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}$. Vi har $A\underline{v}_1 = \lambda_1\underline{v}_1$ og $A\underline{v}_2 = \lambda_2\underline{v}_2$, dvs. $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21}\\a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_{11}\\v_{12}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 v_{11}\\\lambda_1 v_{12}\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21}\\a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_{21}\\v_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_2 v_{21}\\\lambda_2 v_{22}\end{pmatrix}$. Dermed har vi $AP = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{21}\\a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_{11} & v_{21}\\v_{12} & v_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 v_{11} & \lambda_2 v_{21}\\\lambda_1 v_{12} & \lambda_2 v_{22}\end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = PD$. Da P er inverterbar, har vi $P^{-1}AP = D$. $\square$

Merknad. *En kan vise at antagelsen om at P er inverterbar kan sløyfes, da det vil være en konsekvens av de andre antagelsene.*

Tilbake til eksempel a): Vi bruker setningen over til å finne P slik at $P^{-1}AP = D$ for $A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix}$, dvs. la $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ (som er inverterbar). Har da $P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Får da ved litt regning at $A^n = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^n P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2^n} & \frac{2}{5} - \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2^n} \\ \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2^n} & \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2^n} \end{pmatrix}$, og dermed $A^n\underline{v}_0 = A^n\begin{pmatrix} 8000 \\ 2000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4000 + \frac{1}{2^n}\cdot 4000 \\ 6000 - \frac{1}{2^n}\cdot 4000 \end{pmatrix}$. Etter 5 år er da fordelingen gitt ved $\underline{v}_5 = A^5\underline{v}_0 = \begin{pmatrix} 4125 \\ 5875 \end{pmatrix}$. I det lange løp (dvs. når $n \to \infty$) vil fordelingen gå mot $\begin{pmatrix} 4000 \\ 6000 \end{pmatrix}$.

d) Ortogonale matriser

Definisjon. *La A være en 2×2-matrise over $\mathbb{R}$. Vi sier at A er* ortogonal *hvis A^T er den inverse matrisen til A (dvs. $A^T = A^{-1}$).*

Merknad. *A er ortogonal hvis og bare hvis $A^TA = I$.*

Bevis. $\Rightarrow$: Anta A ortogonal, dvs. $A^T = A^{-1}$. Da har vi at $A^TA = A^{-1}A = I$.

$\Leftarrow$: Anta $A^TA = I$. Har da fra Theorem 1.6.3 i boka at $A^T = A^{-1}$, så A er ortogonal. $\square$

Eksempel: La $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Ser at $A^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Siden $\det(A) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, så er A inverterbar, og vi har $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Ser da at $A^{-1} = A^T$, så A er ortogonal.

Definisjon. *La $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ være to vektorer i $\mathbb{R}^2$. Da kaller vi $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ en* ortogonal mengde *hvis $\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 = 0$. Hvis vi i tillegg har $\| \underline{v}_1 \| = \| \underline{v}_2 \| = 1$, så kaller vi $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ en* ortonormal mengde.

Eksempel: $\{(0,1),(1,0)\}$ er en ortonormal mengde. Ser at $(0,1)\cdot(1,0) = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0$, at $\| (1,0) \| = \sqrt{1^2+0^2} = 1$, og at $\| (0,1) \| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$.

Eksempel: $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$ er en ortonormal mengde. Ser at $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\cdot(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 0$, at $\| (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \| = \sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1$, og at $\| (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \| = \sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (-\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1$.

Setning 0.2. *En 2×2-matrise A er ortogonal $\Leftrightarrow$ søylevektorene $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ i A er en ortonormal mengde i $\mathbb{R}^2$.*

Bevis. La $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = (\underline{\mathrm{v}}_1 \mid \underline{\mathrm{v}}_2)$. Da er $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\mathrm{v}}_1^T \\ \underline{\mathrm{v}}_2^T \end{pmatrix}$. Vi får da $A^T A = \begin{pmatrix} \underline{\mathrm{v}}_1^T \\ \underline{\mathrm{v}}_2^T \end{pmatrix} (\underline{\mathrm{v}}_1 \mid \underline{\mathrm{v}}_2) = \begin{pmatrix} \underline{\mathrm{v}}_1 \cdot \underline{\mathrm{v}}_1 & \underline{\mathrm{v}}_1 \cdot \underline{\mathrm{v}}_2 \\ \underline{\mathrm{v}}_2 \cdot \underline{\mathrm{v}}_1 & \underline{\mathrm{v}}_2 \cdot \underline{\mathrm{v}}_2 \end{pmatrix}$. Ser da at A er ortogonal $\Leftrightarrow A^T A = I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \underline{\mathrm{v}}_1 \cdot \underline{\mathrm{v}}_1 & \underline{\mathrm{v}}_1 \cdot \underline{\mathrm{v}}_2 \\ \underline{\mathrm{v}}_2 \cdot \underline{\mathrm{v}}_1 & \underline{\mathrm{v}}_2 \cdot \underline{\mathrm{v}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ $\underline{\mathrm{v}}_1 \cdot \underline{\mathrm{v}}_1 = 1$, $\underline{\mathrm{v}}_1 \cdot \underline{\mathrm{v}}_2 = 0$, $\underline{\mathrm{v}}_2 \cdot \underline{\mathrm{v}}_1 = 0$ og $\underline{\mathrm{v}}_2 \cdot \underline{\mathrm{v}}_2 = 1 \Leftrightarrow \{\underline{\mathrm{v}}_1, \underline{\mathrm{v}}_2\}$ er en ortonormal mengde i $\mathbb{R}^2$. ☐

e) Ortogonalt diagonaliserbare matriser

Definisjon. *A er* ortogonal diagonaliserbar *hvis det eksisterer en ortogonal matrise P som diagonaliserer A, dvs. $P^{-1}AP = D$, hvor D er en diagonalmatrise.*

Merknad. *Ser at vi legger et sterkere krav på P enn i definisjonen av diagonaliserbar.*

Setning 0.3. *A er ortogonalt diagonaliserbar $\Leftrightarrow$ A er symmetrisk*

Bevis. Vi vil bare vise en retning.

$\Rightarrow$: Anta A er ortogonalt diagonaliserbar. Vi vil vise at A er symmetrisk. Har at det eksisterer en ortogonal matrise P slik at $P^{-1}AP = D$, så $A = PDP^{-1}$. Siden P er ortogonal, så er $P^{-1} = P^T$, så $A = PDP^T$. Får da at $A^T = (PDP^T)^T = (P^T)^T D^T P^T = PDP^T = A$, så A er symmetrisk. ☐

Setning 0.4. *La A være symmetrisk, la $\lambda_1 \neq \lambda_2$ være egenverdier til A med tilhørende egenvektorer $\underline{v}_1$ og $\underline{v}_2$ med $\| \underline{v}_1 \| = \| \underline{v}_2 \| = 1$. Da er $P = (\underline{v}_1 \mid \underline{v}_2)$ en ortogonal matrise (og det er den vi bruker til å diagonalisere).*

Eksempel: La $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Vi ønsker å finne en ortogonal P slik at $P^{-1}AP = D$ er en diagonalmatrise. Først trenger vi egenverdiene til A: $\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 4$. Vi får da egenverdiene $\lambda_1 = 3$ og $\lambda_2 = -1$. Vi må så finne egenvektorer med lengde 1. Vi starter med å finne en egenvektor til λ_1: Vi må da løse ligningsettet $(3I - A)\underline{\mathrm{x}} = \underline{0}$, dvs. $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. La $x_2 = t$. Vi får da $x_1 = t$, så egenvektorene er $\{t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \neq 0 \in \mathbb{R}\}$. Vi ønsker at egenvektoren har norm en, så vi må løse ligningen $1 = \| t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \| = | t |$

$\sqrt{2}$. Ser da at $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ gir en løsning, så $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ er en løsningsvektor med norm $\| \underline{v}_1 \| = 1$.

Tilsvarende regning gir at $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ er en løsningsvektor til ligningen $(-I - A)\underline{x} = \underline{0}$ med norm $\| \underline{v}_1 \| = 1$.

Vi har da at $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ er en ortogonal matrise, og $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ er en diagonal matrise.

Setning 0.5. *La A være en symmetrisk matrise over $\mathbb{R}$. Da har vi $\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$, der λ_1 og λ_2 er reelle tall.*

Merknad. *Konklusjonen gjelder ikke for vilkårlige 2×2-matriser. Hvis vi ser på matrisa $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, så har vi $\det(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$, som ikke kan faktoriseres som i setningen. Dermed har A ingen relle egenverdier.*