Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Institutt for matematiske fag

STUD.NR.:

SEMESTERPRØVE I MA1201 LINEÆR ALGEBRA OG GEOMETRI, HØSTEN 2008

Faglig kontakt: Per Hag
Telefon: (735) 91743

Torsdag 16. oktober 2008
Tid: kl. 14.15 - 15.45
Bokmål

Tillatte hjelpemidler: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt enkel kalkulator (HP30S eller CITIZEN SR-270X) tillatt.

Prøven er på 6 sider og har to deler. Oppgavene 1 til 6 er flervalgsoppgaver. I flervalgsdelen har hver oppgave fem mulige svaralternativ og kun et korrekt svar. Kryss av ved dette alternativet. I oppgavene 7 til 9 skal mellomregning/begrunnelse være med i besvarelsen. Alle punkter vektlegges likt. Besvarelsen skrives på disse sidene.

Lykke til!

Oppgave 1

Den reduserte trappeform (the reduced row-echelon form) til matrisen:

$$\begin{bmatrix} 0 & 9 & -9 & -2 \\ 2 & 7 & -1 & -1 \\ 1 & 7 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

er:

$$\boxed{\text{A}} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boxed{\text{B}} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \boxed{\text{C}} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\text{D}} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boxed{\text{E}} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 2

Determinanten til matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & 7 & -13 & 0 \\ -3 & 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

er lik:

$\boxed{\text{A}}$ 168, $\boxed{\text{B}}$ -192, $\boxed{\text{C}}$ 0, $\boxed{\text{D}}$ 25, $\boxed{\text{E}}$ -25

Oppgave 3

Hvor mange løsninger har likningssystemet:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 7y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & \sqrt{2}y & - & 6z & = & 0 \\ -\ 6x & + & y & - & 4z & = & 0 \end{array}$$

$\boxed{\text{A}}$ Nøyaktig 3, $\boxed{\text{B}}$ Ingen, $\boxed{\text{C}}$ Nøyaktig 1

$\boxed{\text{D}}$ Uendelig mange, $\boxed{\text{E}}$ Flere enn 1

Oppgave 4

La A og B være to matriser. Da gjelder følgende:

A Hvis AB er definert, så er BA definert.

B $AB = BA$.

C Hvis både AB og BA er definert, må både A og B være kvadratiske matriser.

D Hvis A er en $m \times n$-matrise og B en $n \times m$-matrise, så er både AB og BA definert.

E Hvis både A og B er $n \times n$-matriser, så gjelder alltid $(AB)^T = A^T B^T$.

Oppgave 5

Hvilken av følgende matriser er ***ikke*** en elementær-matrise:

$$\boxed{\text{A}} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boxed{\text{B}} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boxed{\text{C}} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\text{D}} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boxed{\text{E}} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 6

La A være en nedre triangulær $n \times n$-matrise. Hvilket av følgende utsagn er ***ikke*** korrekt:

A $\det A = 0$ hvis og bare hvis minst et av tallene på diagonalen er lik 0.

B Matrisen $\text{adj}A$ er nedre triangulær.

C A er alltid inverterbar.

D $\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$ (produktet av tallene langs diagonalen).

E Hvis A er inverterbar, så er $\det A^{-1} = (a_{11}a_{22}\dots a_{nn})^{-1}$.

Oppgave 7

a) Løs det homogene likningssystemet:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 3x & + & 5y & + & 5z & = & 0 \\ x & + & 7y & + & 3z & = & 0 \end{array}$$

b) Bestem (hvis mulig) en vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \neq \mathbf{0}$ som står vinkelrett på alle de tre vektorene: $\mathbf{a} = (2, 2, 3),\ \mathbf{b} = (3, 5, 5),\ \mathbf{c} = (1, 7, 3)$.

Oppgave 8

I denne oppgaven kan du benytte følgende resultat:

Teorem. La A være en $n \times n$-matrise.

(i) Hvis B er en matrise som framkommer når en rad i A multipliseres med en konstant k, så vil $\det B = k \det A$.

(ii) Hvis B er en matrise som framkommer av A ved at to rader bytter plass, så er $\det A = -\det B$.

(Bevis for dette teorem kreves ikke!)

Bevis at hvis to rader i en matrise A er proporsjonale, så må $\det A = 0$.

Oppgave 9

La A og B være $n \times n$-matriser. Bevis at dersom AB er inverterbar, så må både A og B være inverterbare.