Norges teknisk-
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

KANDIDATNR.:

SEMESTERPRØVE I MA1201 LINEÆR ALGEBRA OG GEOMETRI, HØSTEN 2009

Faglig kontakt: Per Hag
Telefon: (735) 91743

Tirsdag 20. oktober 2009
Tid: kl. 12.15 - 13.45
Bokmål

Tillatte hjelpemidler: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt enkel kalkulator (HP30S eller CITIZEN SR-270X) tillatt.

Prøven er på **12** sider fordelt på **6** ark og har to deler. Oppgavene 1 til 4 er flervalgsoppgaver. I flervalgsdelen har hver oppgave fem mulige svaralternativ og kun et korrekt svar. Kryss av ved dette alternativet. I oppgavene 5 til 9 skal mellomregning/begrunnelse være med i besvarelsen. Alle punkter vektlegges likt. Besvarelsen skrives direkte på disse sidene. Kandidatnummeret skrives på **hvert** ark.

Lykke til!

Oppgave 1

Anta at A er en 2×2-matrise og at A^{-1} er gitt ved:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Da er A lik

A $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, B $\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, C $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

D $\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, E $\frac{1}{13}\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

Oppgave 2

Gitt det lineære likningssystemet:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & - & z & = & -15 \\ 5x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \\ 3x & + & y & + & 3z & = & 11 \\ -6x & - & 4y & + & 2z & = & 30 \end{array}$$

Da er den reduserte trappeform for totalmatrisen (the augmented matrix):

A $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right]$, B $\left[\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$, C $\left[\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$,

D $\left[\begin{array}{ccr|r} 1 & 0 & 7 & 45 \\ 0 & 1 & -11 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right]$, E $\left[\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$

Oppgave 3

La A, B og C være $n \times n$-matriser. Da gjelder:

- A Hvis $AB = AC$, så er $B = C$.
- B Hvis A er inverterbar, så er $AB = AC$.
- C Hvis A er inverterbar og $BA = CA$, så er $B = C$.
- D For alle $n \times n$-matriser A og B gjelder $(AB)^T = A^T B^T$.
- E Hvis $\det(A) = 0$, så er A inverterbar.

Oppgave 4

Hvis matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \\ -5 & 5 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

så er $\det(A)$ lik:

A 0, B 27, C -13, D 2, E 161.

Oppgave 5

Løs likningssystemet:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & - & y & & & = & 0 \\ 2x & & & + & z & = & 3 \end{array}$$

Hvor mange løsninger har dette likningssystemet?

Oppgave 6

a) Bestem A^{-1} når $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

b) Benytt sammenhengen $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ for å løse likningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & & & = & 4 \\ & & y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & & & - & z & = & 0 \end{array}$$

c) Benytt Cramers regel for å løse likningsystemet i **b)**.

Oppgave 7

Vis at

$$\det\left(\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

er likningen for en rett linje i planet $\mathbb{R}^2$, og at punktene $(1, 2)$ og $(0, 1)$ ligger på denne linjen.

Oppgave 8

a) Vis at når $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, så er $A^2 = 0$ (nullmatrisen).

b) Regn ut A^2 og A^3 når $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

c) La A være en $n \times n$-matrise slik at $A^k = 0$ for et naturlig tall k. Bevis at da er A ikke inverterbar.

d) Anta at A er en kvadratisk matrise og at $A^4 = 0$. Bevis at da er $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$, der I er identitetsmatrisen.

Oppgave 9

For hvilke verdier av α har følgende likningssystem ingen løsning? Nøyaktig en løsning? Uendelig mange løsninger?

$$\begin{array}{rcrrcc} 3x & - & 2y & +z & = & 1 \\ -x & + & y & -\alpha z & = & 0 \\ 2x & - & y & +(\alpha-1)^2 z & = & \alpha \end{array}$$