Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt: Per Hag
Telefon: (735) 91743

MIDTSEMESTERPRØVE I MA1201 LINEÆR ALGEBRA OG GEOMETRI, HØSTEN 2010

Mandag 18. Oktober 2010
Tid: 15:15 – 16:45
BOKMÅL

Tillate hjelpemidler: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillat. Bestemt enkel kalkulator, HP30S eller CITIZEN SR-270X, tillat.

Prøven er på 10 sider fordelt på 5 ark og har to deler. Oppgavene 1 til 4 er flervalgsoppgaver. I flervalgsdelen har hver oppgave fem muligE svaralternativer og kun ett korrekt svar. Kryss av ved dette alternativet. I oppgavene 5 og 6 skal mellomregning og begrunnelse være med i besvarelsen. Alle 13 punkter i prøven vektlegges likt ved vurderingen. Besvarelsen skal skrives direkte på disse sidene. Kandidatnummer skal skrives på **alle** ark som leveres inn.

Lykke til!

KANDIDATNUMMER:

MA1201

LØSNING TIL MIDTSEMESTER-PRØVE

18/10 - 2010

Oppgave 1 Gitt en 2×2-matrise $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$. Da gjelder

[A] $A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$, [B] $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$, [C] $A^{-1} = A$,

[D] A^{-1} eksisterer ikke, [E] $A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$

Beg.: $\det A = 0$

Oppgave 2 Gitt matrisen $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & \alpha \\ -5 & 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Da vil

[A] $\det(A) = 0$ dersom $\alpha \neq 3$.

[B] $\det(A) \neq 0$ for alle verdier av α.

[C] $\det(A) = 27(3-\alpha)$.

[D] $\det(A) = 0$ for alle verdier av α.

[E] $\det(A) = 27$.

Utregning:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & \alpha \\ -5 & 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & \alpha \\ -5 & 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & (\alpha-3) \\ -5 & 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(\alpha-3)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -5 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(\alpha-3)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \underline{27(3-\alpha)}$$

Oppgave 3 La A, B, C og I være $n \times n$-matriser der I er identitetsmatrisen. Da gjelder

[A] Hvis $AB = AC$, så må $B = C$.

[B] Hvis A er inverterbar og $AB = I$, så må $B = A^{-1}$.

[C] Hvis A er inverterbar, så må $\det(A) = 1$.

[D] For alle matriser A og B gjelder $A^T B^T = (AB)^T$.

[E] Hvis A er inverterbar, så må $AB = AC$.

$AB = I \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}I$

$\Rightarrow IB = A^{-1}I \Rightarrow \underline{B = A^{-1}}$

KANDIDATNUMMER:

Oppgave 4 Gitt det lineære ligningssystemet:

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 5x_4 - 2x_5 &= -4 \\ 2x_3 - 8x_4 - x_5 &= 3 \\ x_5 &= 7 \end{aligned}$$

Da blir totalmatrisen på redusert trappeform (reduced row echelon form):

$\boxed{\text{A}}$ $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ ← Ikke på redusert trappeform.

$\boxed{\text{B}}$ $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ← Mangler en kolonne!

$\boxed{\text{C}}$ $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{D}}$ $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ ← Ikke på redusert trappeform.

$\boxed{\text{E}}$ $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ ← Ikke på redusert trappeform.

KANDIDATNUMMER:

Oppgave 5

a) Benytt Gauss-Jordan-eliminasjon for å løse ligningssystemet:

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 4 \\ -x \quad + 2z &= 2 \\ 3x + y + 3z &= -2. \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ 2 \quad 3 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 5 & 8 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 4 \end{array}\right] \cdot(-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 9 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -1 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \cdot\frac{1}{4} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ 2 \quad -5 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$\underline{x = -4, \quad y = 13, \quad z = -1}$

KANDIDATNUMMER:

b) Bestem A^{-1} når $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ 2 \; 3 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 5 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] (\cdot -1)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -1 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \frac{1}{4} \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ 2 \; -5 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 9/4 & 3/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

$$\underline{A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 9 & 3 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

c) Skriv ligningssystemet i a) på formen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, og benytt at du har beregnet den inverse til A til å løse ligningssystemet.

Vi har: $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$, altså

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 9 & 3 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -16 \\ 52 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 13 \\ -1 \end{bmatrix}$$

KANDIDATNUMMER:

d) Benytt Cramer's regel for å løse ligningssystemet i a).

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 4$$

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -16$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}(-1) \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 52$$

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 8 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}(-1) \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -4$$

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-16}{4} = \underline{-4}$$

$$y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{52}{4} = \underline{13}$$

$$z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-4}{4} = \underline{-1}$$

KANDIDATNUMMER:

Oppgave 6 La A, B, C og I være $n \times n$-matriser der I er identitetsmatrisen.

a) Bevis at dersom $AB = I$ og $CA = I$ så må $B = C$.

$$AB = I \Rightarrow C(AB) = CI = C$$
$$CA = I \Rightarrow (CA)B = IB = B$$

Ved assosiativitet har vi

$$\underline{C} = C(AB) = (CA)B = \underline{B}$$

b) Bevis at dersom A og B er inverterbare, så må BA også være inverterbar.

A^{-1}, B^{-1} eksisterer altså. Vi har da:

$$(BA)(A^{-1}B^{-1}) = (B(AA^{-1}))B^{-1} = BB^{-1} = I$$
$$(A^{-1}B^{-1})(BA) = A^{-1}((B^{-1}B)A) = A^{-1}A = I$$

Altså har vi:

$$\underline{(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}}$$

I de resterende punktene av oppgaven kan du benytte deg av kjente resultater om determinanter når du synes det er passende.

c) Bevis at når A er inverterbar, så må $\det(A) \neq 0$.

A inverterbar $\Rightarrow AA^{-1} = I$

Har dessuten generelt for $n \times n$-matrise

$$\det(BC) = (\det B) \cdot (\det C) \text{ og } \det I = 1$$

Altså:

$$(\det A)(\det A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det I = 1$$

<u>Altså må $\det A \neq 0$</u>

KANDIDATNUMMER:

d) Bevis at dersom det finnes en matrise B slik at $AB = I$, så må også $BA = I$.

Siden $(\det A)(\det B) = \det I = 1$. Må ha: $\det A \neq 0$. Dette gir at A er invertibel. Da vil $A^{-1}(AB) = A^{-1}I = A^{-1}$ som gir:

$$B = (A^{-1}A)B = A^{-1}$$

Dermed har vi også $A^{-1}A = I$ eller $\underline{BA = I}$

e) Bevis at dersom AB er inverterbar, så må både A og B være inverterbare.

AB inverterbar $\Rightarrow \det(AB) \neq 0 \Rightarrow \det A \neq 0$ og $\det B \neq 0$

$\Rightarrow$ <u>A inverterbar og B inverterbar</u>.

KANDIDATNUMMER:

KANDIDATNUMMER:

KANDIDATNUMMER: