BEVIS FOR C-S-ULIKHETEN:

Vi skal först minne om en riktig egenskap ved 2. gradsligningen fra v.g.s-pensum. Om vi studerer

$$(\nabla) \qquad At^2 + 2Bt + C = 0$$

så får vi at denne ligning har 2 reelle rötter hvis og bare hvis $B^2 - AC > 0$. Uttrykket for rötten er som kjent:

$$t = \frac{1}{2A}\left(-2B \pm \sqrt{4B^2 - 4AC}\right) = \frac{1}{A}\left(-B \pm \sqrt{B^2 - AC}\right)$$

Videre vet vi at dersom $B^2 - AC > 0$, så vil uttrykket $At^2 + 2Bt + C$ ta både positive og negative verdier. (Tenk på grafen til $\phi(t) = At^2 + 2Bt + C$.)

Vi tar så utgangspunkt i to n-tupler: $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ og $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

Vi har da at:

$$\sum_{i=1}^{n} (u_i t + v_i)^2 \geq 0 \quad \text{for alle valg av } t.$$

Dette gir:

$$t^2 \sum_{i=1}^{n} u_i^2 + 2t \sum_{i=1}^{n} u_i v_i + \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \geq 0 \quad \text{for alle } t.$$

Ut fra ovenstående drøfting med

$$A = \sum_{i=1}^{n} u_i^2, \quad B = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i, \quad C = \sum_{i=1}^{n} v_i^2$$

får vi da:

$$B^2 - AC = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right) \leq 0.$$

eller:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)^{1/2}$$

eller:

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|. \qquad \square$$