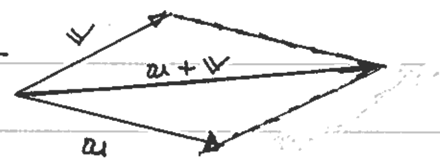
KOMPLEKSE TALL

(Litt av det etterfölgende finnes også i Appendix B, A/R, 10. utgave. Det som blir pensum for eksamen er akkurat det som finnes i dette notatet!!)

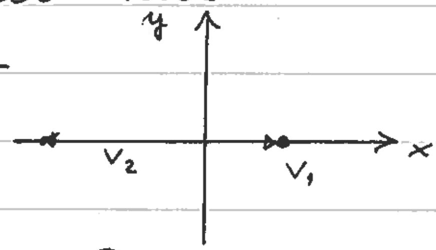
Vektorer i planet. En ny type multiplikasjon.

Vi skal ta utgangspunkt i vektorer i $\mathbb{R}^2$; $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ og $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ og vanlig addisjon av slike vektorer: $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ er diagonalen i parallellogrammet som framkommer når $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ har samme startpunkt. Vi har da bevist at



$$\mathbf{v} + \mathbf{u} = (v_1 + u_1, v_2 + u_2)$$

Vi kan da oppfatte en vektor av type $(v, 0)$ som et reelt tall. Vektoren faller langs den positive x-aksen hvis $v > 0$ og langs den negative x-akse dersom $v < 0$.



Vi kan gjerne skrive $v \sim (v, 0)$ for å markere denne sammenhengen. I så fall har vi hvis $v \sim (v, 0)$ og $u \sim (u, 0)$ at $v + u \sim (v + u, 0)$

Altså vektoraddisjonen korresponderer med den vanlige addisjon $v + u$ i i dette tilfellet.

Vi minner om at vi allerede har to typer produkt for vektorer.

SKALAR-PRODUKT: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cos\Theta$, der Θ er vinkelen mellom $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i $[0, \pi]$. Resultatet blir her et reelt tall.

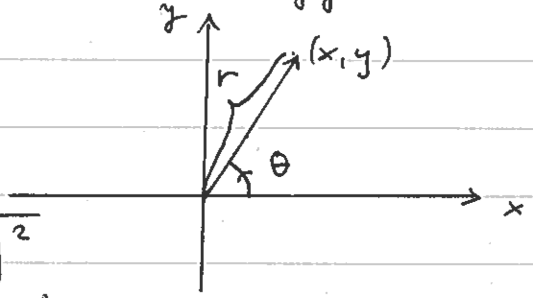
VEKTOR-PRODUKT: $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ er en vektor i $\mathbb{R}^3$ s.a. $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ og $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ utgjør et höyre-system og der $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \sin\Theta$.

Vi skal nå introdusere en tredje type produkt av to vektorer i $\mathbb{R}^2$ der resultatet blir en ny vektor i $\mathbb{R}^2$ (som slett ikke behöver å være et reelt tall!)

Vi minner om at enhver vektor i planet kan angies ved polar-koordinater $\langle r, \theta \rangle$ i tillegg til xy-koordinatene:

$$x = r\cos\Theta$$

$$y = r\sin\Theta$$



der $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

og Θ er vinkelen mellom den positive x-aksen og vektoren (i positiv omlöpsretning.).

Vi definerer produktet av $(x_1, y_1) \sim \langle r_1, \Theta_1 \rangle$ og $(x_2, y_2) \sim \langle r_2, \Theta_2 \rangle$ som vektoren med polarkoordinat-framstillingen:

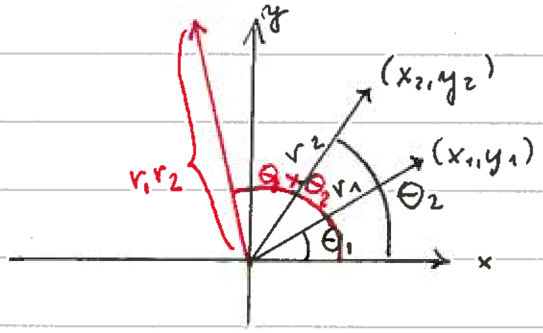
$$\langle r_1 \cdot r_2, \Theta_1 + \Theta_2 \rangle.$$

ⓒ

De kartesiske koordinater for produktet blir dermed:

$$x = r_1 r_2 \cos(\Theta_1 + \Theta_2)$$
$$y = r_1 r_2 \sin(\Theta_1 + \Theta_2)$$

Dette kan illustreres slik:



Hvordan vil denne type multiplikasjon fortone seg hvis vi spesielt ser på vektorer av typen $(v, 0)$ og $(u, 0)$. Vi har da $(v, 0) \sim \langle |v|, 0 \rangle$ eller $(v, 0) \sim \langle |v|, \pi \rangle$ og tilsvarende for $(u, 0)$. Vi ser på 3 tilfeller:

$v > 0,\ u > 0$: $\quad (u, 0) \cdot (v, 0) \sim \langle |uv|, 0 \rangle$

- altså produktet blir et positivt tall.

$v > 0,\ u < 0$: $\quad (u, 0) \cdot (v, 0) \sim \langle |uv|, 0 + \pi \rangle = \langle |uv|, \pi \rangle$

- resultatet blir et negativt tall.

$v < 0,\ u < 0$: $\quad (u, 0) \cdot (v, 0) \sim \langle |uv|, \pi + \pi \rangle = \langle |uv|, 2\pi \rangle$

- resultatet blir et positivt tall.

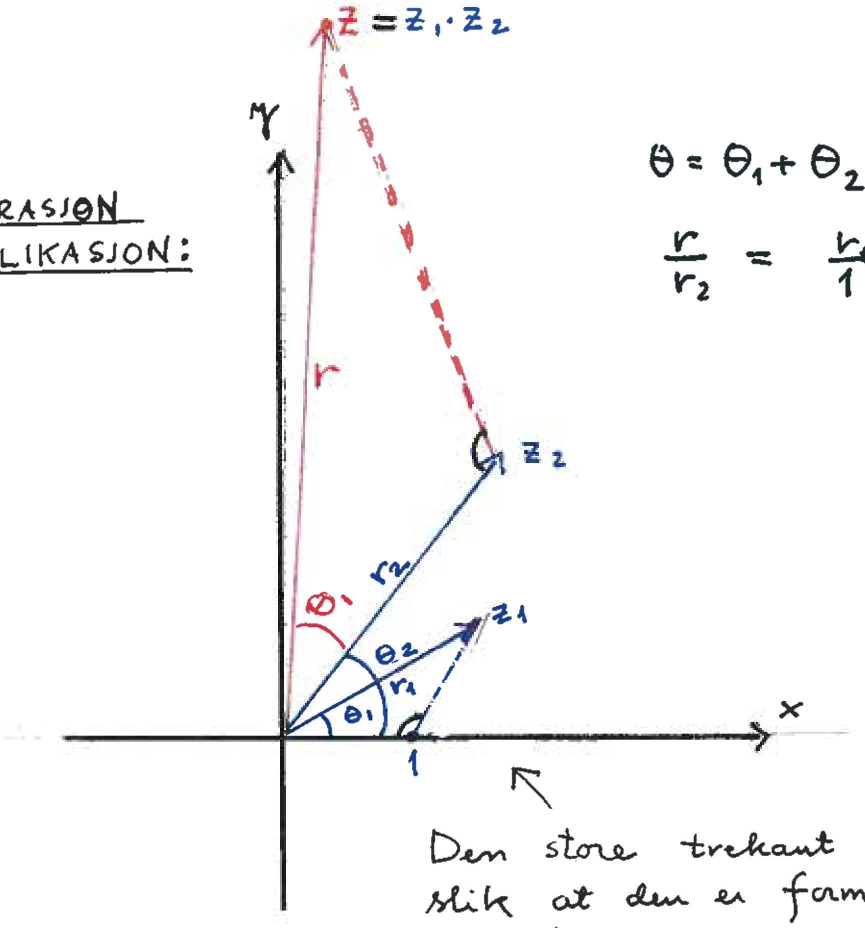
M.a.o. reduserer ovenstående produkt til vanlig produkt av reelle tall. Legg merke til at lengden (absolutt-verdien) av det reelle tallet vi får ut også er slik vi skal ha det ved

Ⓓ

<u>ILLUSTRASJON AV MULTIPLIKASJON:</u>

$$\theta = \theta_1 + \theta_2$$

$$\frac{r}{r_2} = \frac{r_1}{1} \Rightarrow r = r_1 \cdot r_2$$

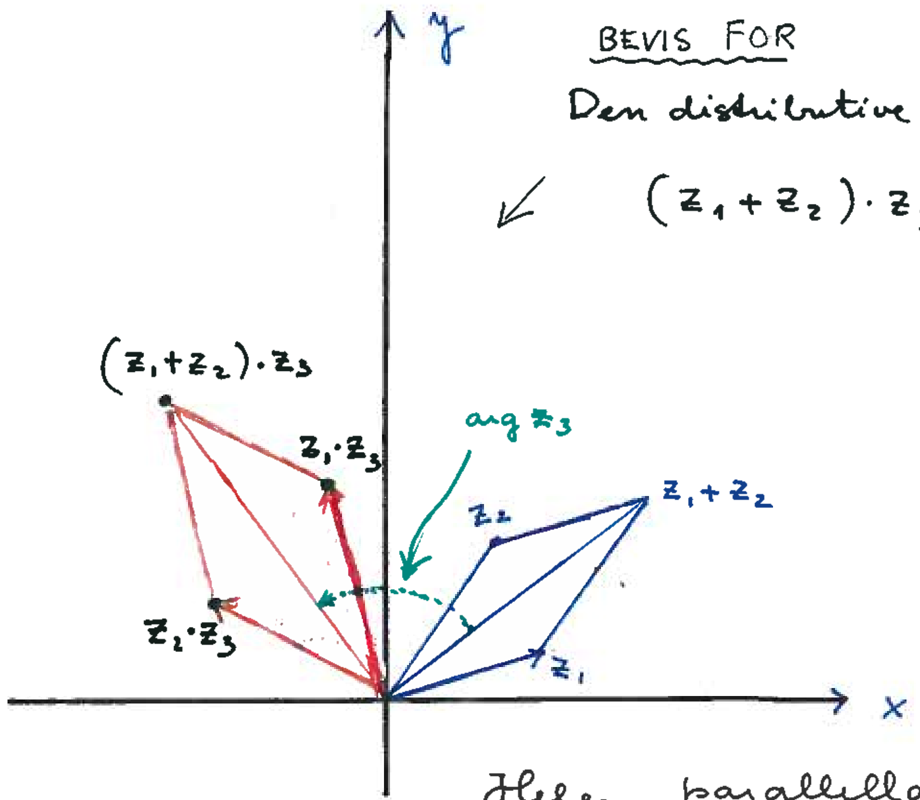


Den store trekant er konstruert slik at den er formlik med den lille.

<u>BEVIS FOR</u>

Den distributive lov:

$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = (z_1 \cdot z_3) + (z_2 \cdot z_3)$$



Hele parallellogrammet dreies en vinkel som er lik argumentet til z_3 – og forstörres med en faktor lik $|z_3|$.

Ⓔ

Hva med andre regneregler vi kjenner fra regning med reelle tall? Har vi f. eks.:

(i) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (Kommutativ for add.)

(ii) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (Assosiativ add.)

(iii) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ (Kommutativ mult.)

(iv) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ (Assosiativ mult.)

BEVIS: (i) og (ii) er etablert for vektorregning i planet. (iii) er grei å sjekke. For (iv) har vi:

$$z_1 \sim \langle r_1, \Theta_1 \rangle, \quad z_2 \sim \langle r_2, \Theta_2 \rangle, \quad z_3 \sim \langle r_3, \Theta \rangle$$

$$z_1 \cdot z_2 \sim \langle r_1 \cdot r_2, \Theta_1 + \Theta_2 \rangle$$

$$\begin{aligned}(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 &\sim \langle (r_1 \cdot r_2) r_3, (\Theta_1 + \Theta_2) + \Theta_3 \rangle \\ &\sim \langle r_1 \cdot (r_2 \cdot r_3), \Theta_1 + (\Theta_2 + \Theta_3) \rangle \\ &\sim z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)\end{aligned}$$

Konsekvens av regneregler for reelle tall!

KONKLUSION:

Det ovenstående viser at vi kan regne med disse vektorene under de to regneoperasjonene + og · nøyaktig som vi gjør når vi regner med tall.

DEFINISJON:

Vi kaller disse vektorene med de to ovennevnte regneoperasjon for komplekse tall. Planet kalles i denne sammenheng det komplekse plan og betegnes gjerne $\mathbb{C}$. x-aksen kalles den reelle akse, y-aksen den imaginære akse.

Ⓕ

Vi kunne egentlig fortsatt med å bruke skrivemåten $z_1 = \langle r_1, \Theta_1 \rangle$ og $z_2 = \langle r_2, \Theta_2 \rangle$ og innføre $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ der $x_1 = r_1 \cos\Theta_1$, $y_1 = r_1 \sin\Theta_1$ og $x_2 = r_2 \cos\Theta_2$, $y_2 = r_2 \sin\Theta_2$. Vi må da huske at:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

og

$$z_1 \cdot z_2 = \langle r_1 \cdot r_2, \Theta_1 + \Theta_2 \rangle$$

Men dette blir for tungvint!

Vi innfører derfor betegnelsene:

$(a, 0) = a$ (identifiserer $\mathbb{R}$ med x-aksen)

og $(0, 1) = i$ (gir denne vektoren et spesielt navn!)

Vi har da følgende sammenheng:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy.$$

(Det siste leddet framkommer slik:

$iy = (0,1)\cdot(y,0) = \langle y \cdot 1, 0 + \frac{\pi}{2} \rangle = (0, y)$ når $y > 0$,

$iy = (0,1)\cdot(y,0) = \langle -y \cdot 1, \pi + \frac{\pi}{2} \rangle = (0, y)$ når $y < 0$.

Vi merker oss spesielt at:

$$\underline{i^2} = (0,1)(0,1) = \langle 1, \pi \rangle = (-1, 0) = \underline{-1}$$

Vi minner om regnereglene (i)–(iv) på forrige side. Da kan vi regne på følgende måte:

$$\underline{z_1 \cdot z_2} = (x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 + (i^2)y_1y_2 = x_1x_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2) - y_1y_2$$

$$= \underline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)}$$

TALLEKSEMPEL:

$z_1 = 2 + 5i$, $z_2 = -1 - i$.

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + 5i)(-1 - i) = (-2 + 5) + i(-5 - 2)$$

$$= \underline{3 - 7i}$$

MERKNAD:

Det ovenstående beviser at vi kan regne med de komplekse tall nøyaktig som vi gjør med reelle tall – når vi bare husker at

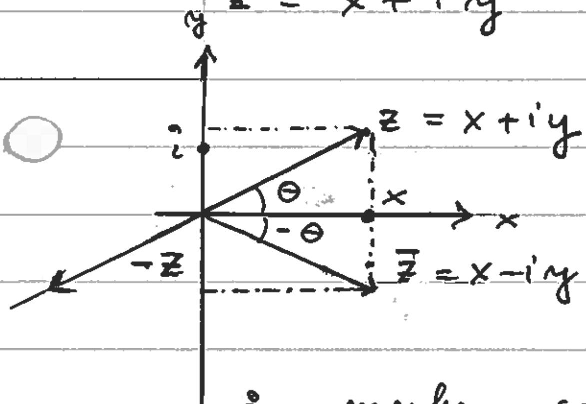
$$i^2 = -1$$

Det er ingenting mystisk eller "imaginært" ved i når vi introduserer i slik vi har gjort ovenfor.

Vi vet fra vektorregningen at om $z = (x, y)$, så er $-z = (-x - y)$ eller: $z = x + iy \Rightarrow -z = -x - iy$.

KOMPLEKS KONJUGERT:

Vi definerer den konjugerte til $z = x + iy$ som $\bar{z} = x - iy$



Vi har nå:

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy)$$
$$= x^2 - (i)^2 y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$

(Dette innsees også ved å merke seg at om $\arg z = \theta$, så er $\arg \bar{z} = -\theta$. Altså må $z\bar{z}$ ha argument 0 og modulus $r^2 = x^2 + y^2$)

DIVISJON:

? Hva er egentlig definisjonen av divisjon?

La z_1, z_2 være to komplekse tall der $z_2 \neq 0$. Hvordan kan da divisjon $z_1 : z_2$ eller z_1/z_2 defineres?

(H)

Vi ønsker å bestemme et $w \in \mathbb{C}$ som er s.a. $zw = 1$ når $z \neq 0$. Vi prøver med $\frac{1}{|z|^2}\bar{z}$: $z\frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{z\bar{z}}{|z|^2} = 1$ siden $z\bar{z} = |z|^2$

Mer generelt: Hvis $z_2 \neq 0$, kan vi analogt sette $\frac{z_1}{z_2} = z_1\frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2}$ fordi $z_2 \cdot z_1 \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2} = z_1$.

LITT HISTORIE:

Regning med komplekse tall går langt tilbake i tiden. De dukket opp först og fremst i forbindelse med lösning av ligninger:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

der $a_0, a_1, \dots, a_n$ er reelle konstanter. Se f.eks. på:

$$x^2 + 2x + 5 = 0$$

Vi vet her at formelen for röttene er:

$$x = \tfrac{1}{2}\left[-2 \pm \sqrt{4 - 4.1.5}\,\right]$$
$$= -1 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-16} = -1 \pm i2$$

Hvorfor er $\sqrt{-16} = \pm 4i$?

Man oppfattet dette resultat som et bevis på at ligningen vi startet med var ulösbar.

Leonard Euler (1707 - 1783) var en mester i å regne med komplekse tall, til tross for at han oppfattet $i = \sqrt{-1}$ som "imaginær".

Den som förste introduserte den geometriske idéen vi har tatt utgangspunkt i ovenfor var faktisk en nordmann: Caspar Wessel (1745-1818). Han var först og fremst landmåler - og gjorde i den sammenheng et stort pionerarbeid når det gjalt å tegne bedre kart over hele Danmark og deler av Nord-Tyskland. Han tok dessuten juridikum ved Universitetet i København. Hans mer berömte bror, dikteren Johan Herman Wessel, skrev fölgende lille dikt om sin bror Caspar:

"Han tegner landkart og leser loven,
og er saa flittig som jeg er doven."

Det komplekse plan blir gjerne oppkalt etter den store tyske matematiker Carl F. Gauss (1777-1855): "Det Gaussiske plan", eller etter franskmannen J.R. Argand (1768-1822): "Argand-planet". Men disse to var faktisk senere ute med denne idéen enn Caspar Wessel, som skrev et arbeid (på dansk) allerede i 1798 med tittel:

"Directionens analytiske Betegning."

Det burde derfor hete det Wesselske plan. Wessel brukte sine idéer til å forenkle de utregninger han utförte i sin landmåling.

(J)

ALGEBRAENS FUNDAMENTAL-TEOREM.

Hva kan ellers sies om rötter til en ligning av typen:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0 \ ?$$

Vi kan generelt stille dette spörsmål for polynomer der $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. C.F. Gauss beviste i sin doktoravhandling i 1799 at en slik ligning har minst en rot $z = z_1$ i det komplekse plan. Det som da egentlig er lett å bevise i neste omgang er at vi da har identiteten:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n \equiv a_0 (z - z_1)(z^{n-1} + \cdots + b_{n-1})$$

(Dette fölger lett ved polynomdivisjon som pleide å være pensum i v.g.s.) Dermed gir Gauss-resultatet at dersom $n > 1$, så har også

$$z^{n-1} + \cdots + b_{n-1} = 0$$

minst en rot: $z = z_2$. Dermed kan vi skrive:

$$z^{n-1} + \cdots + b_n \equiv (z - z_2)(z^{n-2} + \cdots + c_n)$$

o.s.v. Tilsammen gir dette:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \equiv a_0 (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

M.a.o har n-gradspolynomet vi startet med eksakt n rötter i det komplekse plan – forutsatt at man regner med multiplisitet. Eks.:

$z^2 + 2z + 1 \equiv (z+1)^2$ har dobbelroten $z = -1$.

TEOREM 2.0.1 (A/R, 10. utgave)

For vilkårlige komplekse tall gjelder:

(a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$

(b) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2$

(c) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$

(d) $\overline{(z_1 / z_2)} = \overline{z}_1 / \overline{z}_2 \qquad (z_2 \neq 0)$

(e) $\overline{\overline{z}} = z$

(f) $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$.

TEOREM

Hvis $p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$ er et polynom med <u>reelle</u> koeffisienter og $z = z_0$ er en rot i ligningen

$$p(z) = 0,$$

så er også $z = \overline{z}_0$ en rot i denne ligningen.

OBSERVASJON:

$$(z - z_0)(z - \overline{z}_0) = z^2 - (z_0 + \overline{z}_0) z + z_0 \overline{z}_0$$

$$\left.\begin{aligned} z_0 &= x_0 + i y \\ \overline{z}_0 &= x_0 - i y \end{aligned}\right\} \Rightarrow z_0 + \overline{z}_0 = 2 x_0 \qquad |z_0|^2 = z_0 \overline{z}_0$$

Polynomet har m.a.o. reelle koeffisienter!