MA 1201, HØST 2010

KVADRATISKE FORMER / KJEGLESNITT.

(Dette notat omfatter det som er pensum til eksamen fra avsnitt 7.3)

Vi ønsker i dette avsnitt å identifisere de plane kurver som er definert ved ligninger av typen:

$$(\triangledown) \qquad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Vi vil først minne om at vi vet fra tidligere at en ligning av typen:

$$ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

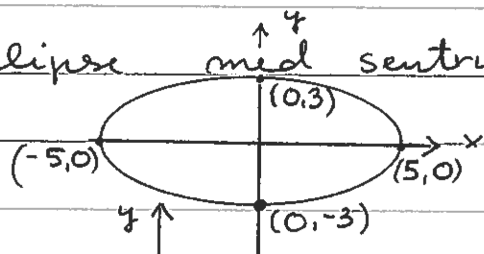
representerer forskjellige typer av kjeglesnitt. La oss se på noen eksempler:

(i) $$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

er ligningen for en sirkel med sentrum i origo.

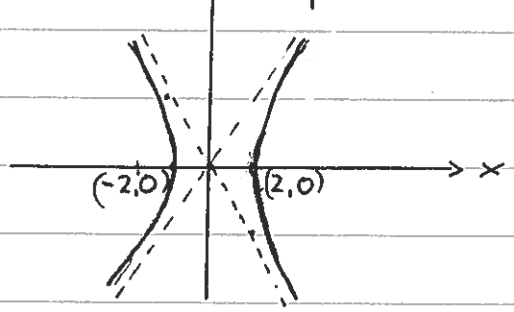
(ii) $$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

er ligningen for en ellipse med sentrum i origo og halvakser lik $a = 5$, $b = 3$



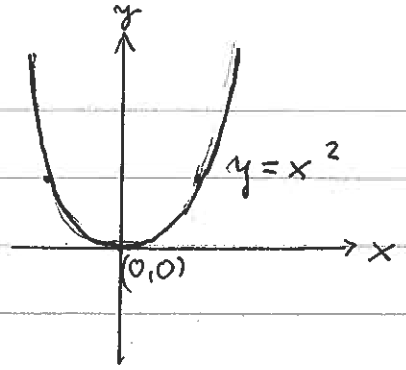
(iii) $$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$$

er en hyperbel sentert i $(0,0)$ og asymptoter $y = \pm\frac{3}{2}x$



(iv) $$y = x^2$$

er en parabel med toppunkt i origo.



(iv) Ligningen:

$$x^2 + 2x - y^2 + 4y = 6$$

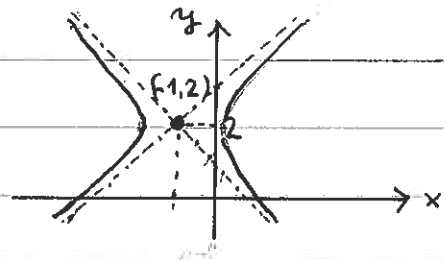
kan omformes på følgende måte:

$$(x^2 + 2x + 1) - (y^2 - 4y + 4) = 6 + 1 - 4$$

$$(x+1)^2 - (y-2)^2 = 3$$

eller: $\frac{(x+1)^2}{(\sqrt{3})^2} - \frac{(y-2)^2}{(\sqrt{3})^2} = 1.$

Vi ser straks at denne kurven blir en hyperbel med sentrum i punktet $(-1,2)$ og asymptoter $y - 2 = \pm(x+1)$



(v) $x^2 + y^2 + 1 = 0$

har imidlertid ingen mengde i $\mathbb{R}^2$ som sin løsningsmengde. Dette viser at vi ikke alltid vil ha at en ligning av typen (▽) representerer en punktmengde i planet!

(vi) Ligningen:

$$x^2 - 4y^2 = 0$$

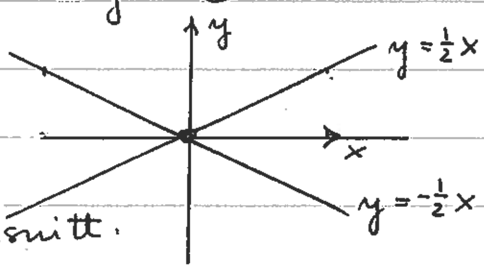
er også av typen (▽). Den er ekvivalent med:

$$(x - 2y)(x + 2y) = 0$$

som igjen er ekvivalent med:

$$x - 2y = 0 \quad \text{eller} \quad x + 2y = 0$$

Dette er altså to rette linjer gjennom origo med stigningstall $\pm\frac{1}{2}$. Dette kalles et degenerert kjeglesnitt.



GJENSTÅENDE PROBLEM:

Ingen av eksemplene ovenfor inneholder produktledd som bxy i ligningen (∇). Hvordan skal vi bestemme kurver som har ligning der produktledd forekommer? I det etterfölgende skal vi benytte oss av idéene vi utviklet i notatet om egenverdi-problemer for 2×2-matriser. Vi foretar da en dreining av vårt koordinatsystem som innebærer at produktleddet blir borte. Da går ligningen over til en ligning uten produktledd, som vi da kan behandle som i de eksemplene vi studerte foran. Kalles de nye koordinatene x' og y', gjenstår det da å bestemme hvordan vårt opprinnelige xy-system er plassert i forhold til det nye $x'y'$-system.

Vi innförer betegnelsen kvadratisk form i x og y for uttrykk av formen

$$Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

Vi bemerker först at $Q(x,y)$ kan skrives som et matrise-produkt:

$$Q(x,y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ax + \frac{b}{2}y \\ \frac{b}{2}x + cy \end{bmatrix}$$

$$= ax^2 + \frac{b}{2}xy + \frac{b}{2}xy + cy^2. \quad (1\times 1\text{-matrise})$$

Innförer vi betegnelsene $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$, kan vi også skrive:

$$Q(x,y) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}.$$

Vi noterer oss at vi valgte å innføre A som en symmetrisk matrise. Vi skal i det etterfölgende se at dette har en viktig fordel.
Vi kan se på fölgende eksempel:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 2x^2 + 6xy - 7y^2$$

Men denne kvadratiske form kan også skrives v.h.a. matriseprodukt slik:

$$Q(x,y) = \mathbf{x}^T A' \mathbf{x}$$

der $A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$. Vi har da:

$$\mathbf{x}^T A' \mathbf{x} = 2x^2 + xy + 5yx - 7y^2$$
$$= 2x^2 + 6xy - 7y^2$$

Anta nå at vi starter med en kvadratisk form:

$$Q(x,y) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x},$$

der A er en symmetrisk matrise.
Da har A to distinkte reelle egenverdier: $\lambda_1 \neq \lambda_2$. La $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ være de to tilhörende normerte egenvektorer. Vi innförer da:

$P = [\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2]$, altså matrisen der de to egenvektoren utgjør kolonnene.

Fra notatet om egenverdier 2×2-matriser vet vi at P er en ortogonal-matrise som oppfyller betingelsen

$$A = PDP^T,$$

eller $P^TAP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ og der $P^T = P^{-1}$. Nå innfører vi nye variable x', y' og betegner $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ med $\mathbf{x}'$. Vi har da videre om vi setter

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x}',$$

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = (P\mathbf{x}')^T A (P\mathbf{x}') = \mathbf{x}'^T (P^T A P)\mathbf{x}'$$
$$= \mathbf{x}'^T D \mathbf{x}' = [x' \; y'] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$
$$= \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$$

Altså er produktleddet fjernet!

EKSEMPEL 1:

La $Q(x,y) = 9x^2 + 4xy + 6y^2$
$$= [x \; y] \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Vi bestemmer egenverdien til den symmetriske matrisen:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} (9-\lambda) & 2 \\ 2 & (6-\lambda) \end{vmatrix} = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4$$
$$= \lambda^2 - 15\lambda + 50 = (\lambda - 10)(\lambda - 5) = 0$$

Altså er egenverdien til A

$$\lambda_1 = 10 \quad \text{og} \quad \lambda_2 = 5$$

Ut fra teorien skal vi da innføre:

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$$

i den opprinnelige kvadratiske formen, og vi får da:

$$9x^2 + 4xy + 6y^2 = 10x'^2 + 5y'^2$$

Hvis det bare gjelder å finne denne kvadratiske formen, trenger man strengt tatt ikke å bruke tid på å bestemme P. Men vi skal se i det etterfølgende at i diskusjonen omkring kjeglesnitt trenger vi å kjenne P av to grunner:

(i) I den gitte ligning kan det i tillegg opptre første-grads ledd. Eksempelvis kan vi starte med ligningen:

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 + 4x + 13y = \frac{1}{4}.$$

Når vi skifter til de nye koordinater x', y' som ovenfor, trenger vi også erstatte det lineære ledd $4x + 13y$ med et uttrykk i x' og y'. Her trenger vi å kjenne P.

(ii) Når vi har skissert kurven i det nye $x'y'$-systemet må vi finne hvordan $x'y'$-systemet er dreid i forhold til xy-systemet for at skissen skal bli komplett. Her trenger vi også å kjenne P for å tegne den endelige skissen. (Dette blir klart i etterfølgende eksempler!)

EKSEMPEL 2:

Vi tar utgangspunkt i ligningen:

$$9x^2 + 4xy + 6y^2 = 1$$

Vi skal bestemme hvilken type kurve denne ligningen bestemmer – og så tegne en skisse i xy-systemet.

Vi har altså

$$\mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{x} = 1 .$$

Fra eksempel 1 har vi at egenverdien til matrisen blir $\lambda_1 = 10$ og $\lambda_2 = 5$

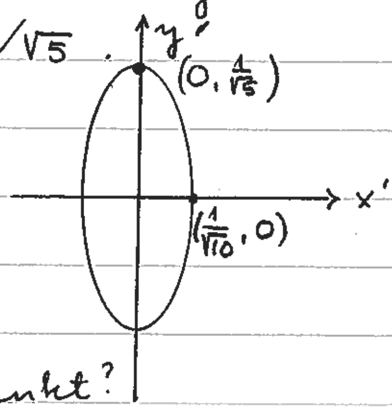
Vi vet fra eksempel 1 at variabel-skiftet $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$ gir oss ligningen:

$$10x'^2 + 5y'^2 = 1$$

På standardform blir dette

$$\frac{x'^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2} + \frac{y'^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = 1 ,$$

som vi gjenkjenner som en ellipse med sentrum i origo og halvakser i x'-retning av lengde $1/\sqrt{10}$ og i y'-retningen av lengde $1/\sqrt{5}$.



Vi angir kurven i $x'y'$-systemet. Men hvordan ligger kurven i forhold til xy-systemet som var vårt utgangspunkt?

For å finne ut av dette må vi bestemme matrisen P som gir

sammenhengen $\mathbb{x} = P\mathbb{x}'$. Vi vet fra det foregående at kolonnene i P er de normaliserte egenvektorene svarende til egenverdiene $\lambda_1 = 10$ og $\lambda_2 = 5$.
Vi må da studere to ligningsystem:

$\lambda_1 = 10$:

$$(A - \lambda_1 I)\mathbb{x} = \begin{bmatrix} (9-\lambda_1) & 2 \\ 2 & (6-\lambda_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

som gir:
$$\left.\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad x_1 = 2x_2$$

Dette gir den normaliserte egenvektoren:

$$\mathbb{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 5$:

$$(A - \lambda_2 I)\mathbb{x} = \begin{bmatrix} (9-\lambda_2) & 2 \\ 2 & (6-\lambda_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

eller:
$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad x_2 = -2x_1,$$

som gir den normaliserte egenvektoren:

$$\mathbb{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Altså har vi:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Om vi nå innfører betegnelsene $\mathbb{i}'$ og $\mathbb{j}'$ for enhetsvektorene langs henholdsvis den positive x'-aksen og den positive y'-aksen, gir transformasjonen

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$$

følgende:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

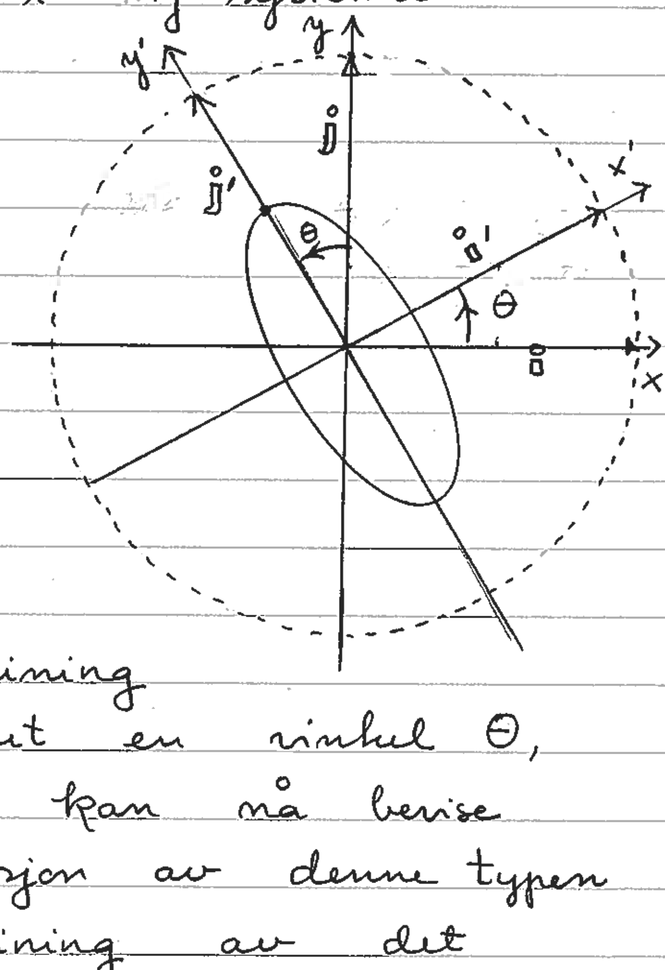
koordinatene for $\mathbf{i}'$ i xy-systemet.

Analogt blir:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

koordinatene for $\mathbf{j}'$ i xy-systemet.

Vi kan da gi en (omtrentlig) skisse av ellipsen plassert i det opprinnelige xy-systemet.



Vi observer her at transformasjonen

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$$

representerer en dreining av koordinatsystemet en vinkel θ, der $\tan\theta = \frac{1}{2}$. Vi kan nå bevise at en transformasjon av denne typen alltid gir en ren dreining av det gamle koordinatsystem i forhold til det nye dersom vi også sørger for at $\det P = 1$. Vi har nemlig

at P har formen $[\mathbb{v}_1 | \mathbb{v}_2]$ der $\mathbb{v}_1$ og $\mathbb{v}_2$ er normaliserte egenvektorer til A.
Vi har da at $\|\mathbb{v}_1\| = \|\mathbb{v}_2\| = 1$ og at $\mathbb{v}_1 \cdot \mathbb{v}_2 = 0$. Da finnes det en vinkel Θ s.a. $v_{11} = \cos\Theta$ og $v_{12} = \sin\Theta$ siden $v_{11}^2 + v_{12}^2 = 1$ der $[v_{11}, v_{12}]^T = \mathbb{v}_1$
Da blir $v_{21} = -\sin\Theta$ og $v_{22} = \cos\Theta$ (som i ovenstående eksempel) — eller vi kan velge $v_{21} = \sin\Theta$ og $v_{22} = -\cos\Theta$. Da blir $\mathbb{j}'$ motsatt rettet av det vi har på vår figur foran.
Generelt har vi at $PP^T = I$, og dermed $(\det P)(\det P^T) = 1$ og siden $\det(P^T) = \det(P)$, gir dette at

$$(\det P)^2 = 1 \; ; \; \text{d.v.s}$$

$$\det(P) = 1 \quad \text{eller} \quad \det(P) = -1.$$

Dersom vi ønsker at $\mathbb{x} = P\mathbb{x}'$ skal representere en ren dreining av koordinat-systemet som i vårt eksempel foran, må vi velge $\det(P) = 1$. Dette oppnåes ved f.eks. å erstatte $\mathbb{v}_2$ med $-\mathbb{v}_2$ når $\det[\mathbb{v}_1 | \mathbb{v}_2]$ opprinnelig ble lik -1. Da vil det vi gjerne betegner et höyre-system gå over til et höyre-system ved:

$$\mathbb{x} = P\mathbb{x}'.$$

EKSEMPEL 3:

Vi vil nå se på kurven:

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 + 4x + 13y = \frac{1}{4}$$

Den tihörende kvadratiske formen kan da skrives på fölgende måte:

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = [x\ y]\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Her har vi igjen passet på at matrisen A er symmetrisk. I fölge teorien blir da de tilhörende egenverdier λ_1, λ_2 reelle og $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Vi bestemmer först egenverdiene:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} (2-\lambda) & 2 \\ 2 & (5-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{eller}$$

$$(\lambda-2)(\lambda-5) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda-1)(\lambda-6)$$

Altså har vi $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 6$.

Vi bestemmer så egenvektorene til disse egenverdiene.

$\underline{\lambda_1 = 1:}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ gir $x_1 = -2x_2$, og dermed normert

egenvektor: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

$\underline{\lambda_2 = 6:}$ $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ gir $2x_1 = x_2$ og dermed normert

egenvektor: $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$. Altså: $P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

Den nye kvadratiske formen blir:

$$x'^2 + 6y'^2$$

Videre har vi at:

$$x = \frac{2}{\sqrt5}x' + \frac{1}{\sqrt5}y' \quad \text{og} \quad y = -\frac{1}{\sqrt5}x' + \frac{2}{\sqrt5}y'$$

Innsettes dette i den opprinnelige ligningen:

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 + 4x + 13y = \frac14 ,$$

får vi:

$$x'^2 + 6y'^2 + 4\left(\frac{2}{\sqrt5}x' + \frac{1}{\sqrt5}y'\right) + 13\left(-\frac{1}{\sqrt5}x' + \frac{2}{\sqrt5}y'\right) = \frac14$$

eller:

$$x'^2 + 6y'^2 - \frac{5}{\sqrt5}x' + \frac{30}{\sqrt5}y' = \frac14$$

$$x'^2 + 6y'^2 - \sqrt5 x' + 6\sqrt5 y' = \frac14$$

Vi kompletterer kvadratene og får:

$$\left(x'^2 - \sqrt5 x + \left(\frac{\sqrt5}{2}\right)^2\right) + 6\left(y'^2 + \sqrt5 y + \left(\frac{\sqrt5}{2}\right)^2\right) = \frac14 + \frac54 + \frac{30}{4} = 9$$

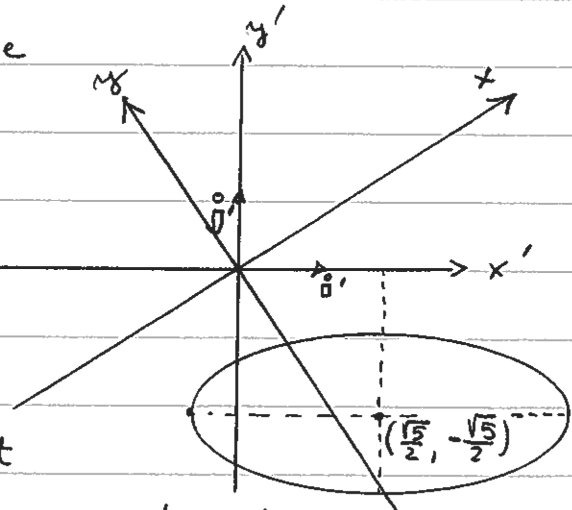
Dette blir da:

$$\left(x' - \frac{\sqrt5}{2}\right)^2 + 6\left(y' + \frac{\sqrt5}{2}\right)^2 = 9$$

eller:

$$\frac{\left(x' - \frac{\sqrt5}{2}\right)^2}{3^2} + \frac{\left(y' + \frac{\sqrt5}{2}\right)}{\left(\sqrt{\frac32}\right)^2} = 1$$

I $x'y'$-systemet blir dette en ellipse med sentrum i $\left(\frac{\sqrt5}{2}, -\frac{\sqrt5}{2}\right)$ og halvakser lik $a = 3$, $b = \sqrt{\frac32}$



Vi observerer at

$P\mathbf{i}' = \left[\frac{2}{\sqrt5}, -\frac{1}{\sqrt5}\right]^T$, $P\mathbf{j}' = \left[\frac{1}{\sqrt5}, \frac{2}{\sqrt5}\right]^T$

Altså ligger $\mathbf{i}'$ i 4. kvadrant og $\mathbf{j}'$ i 1. kvadrant i xy-systemet

$\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$ er derfor en dreining på $\theta = \arctan\left(-\frac12\right)$.

EKSEMPEL 4:

Vi skal nå studere kurven:

(*) $$2x^2 - 4xy - y^2 - 4x + 10y = 13$$

Her blir den tilhörende kvadratiske form:

(* $$2x^2 - 4xy - y^2 = [x\ y]\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Vi må finne egenverdien til matrisen:

$$\begin{vmatrix} (2-\lambda) & -2 \\ -2 & (-1-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{eller } (\lambda-2)(\lambda+1) - 4 = 0$$

som gir: $\lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda-3)(\lambda+2) = 0$

Altså er egenverdiene $\lambda_1 = 3$ og $\lambda_2 = -2$.

Vi bestemmer så de tilhörende normerte egenvektorer:

$\underline{\lambda_1 = 3}$: $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ gir $x_1 = -2x_2$,

altså: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

$\underline{\lambda_2 = -2}$: $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ gir $x_2 = 2x_1$,

eller: $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$; $P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

Vi har dermed at

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{x}'^T D \mathbf{x}' \quad \text{der } D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Altså blir den kvadratiske formen (*

$$2x^2 - 4xy - y^2 = 3x'^2 - 2y'^2.$$

Videre har vi:

$$-4x + 10y = -4\left(\tfrac{2}{\sqrt{5}}x' + \tfrac{1}{\sqrt{5}}y'\right) + 10\left(-\tfrac{1}{\sqrt{5}}x' + \tfrac{2}{\sqrt{5}}y'\right)$$

$$= -\frac{18}{\sqrt{5}}x' + \frac{16}{\sqrt{5}}y'.$$

Innsatt i ligningen (*) ovenfor gir dette:

$$3x'^2 - 2y'^2 - \frac{18}{\sqrt{5}}x' + \frac{16}{\sqrt{5}}y' = 13$$

eller:

$$3\left(x'^2 - \frac{6}{\sqrt{5}}x'\right) - 2\left(y'^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}y'\right) = 13$$

Vi kompletter kvadratene og får:

$$3\left(x'^2 - \frac{6}{\sqrt{5}}x' + \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2\right) - 2\left(y'^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}y' + \left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2\right) = 13 + \frac{27}{5} - \frac{32}{5}$$

eller:

$$3\left(x' - \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 - 2\left(y' - \frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 = 12$$

eller:

$$\frac{\left(x' - \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2}{2^2} - \frac{\left(y' - \frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2}{(\sqrt{6})^2} = 1$$

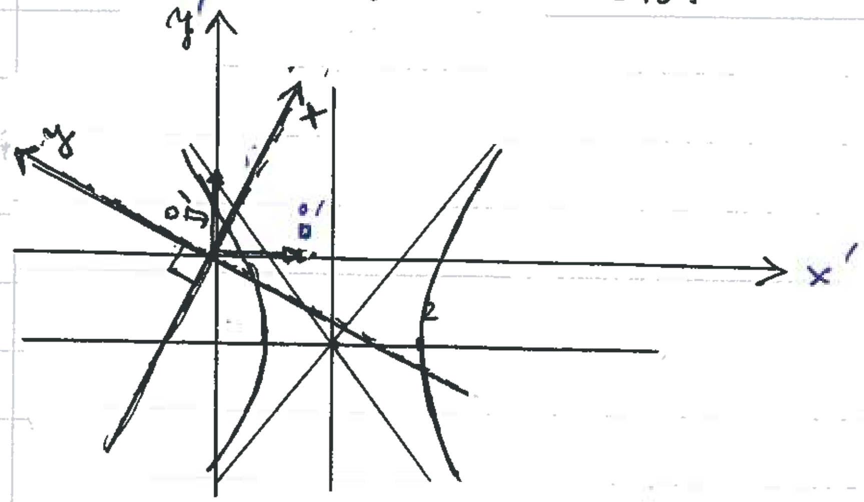
Dette blir en hyperbel i $x'y'$-systemet med sentrum i $\left(\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ og halvakser lik $a = 2$, $b = \sqrt{6}$. Asymptotene i dette systemet blir:

$$y' - \frac{4}{\sqrt{5}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}\left(x' - \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$$

Videre ser vi at

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$ er koordinatene til $\mathbf{i}'$ i xy-systemet.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$ blir koordinaten til $\mathbf{j}'$ i xy-systemet.



EKSEMPEL 5:

La kurven vi skal studere være gitt ved:

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 20x + 15y = 0.$$

Vi innfører da den symmetriske matrisen: $A = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$ og vil

i første omgang studere den kvadratiske formen:

$$[x]^T A [x] = 9x^2 + 24xy + 16y^2.$$

Vi bestemmer egenverdiene til A:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} (9-\lambda) & 12 \\ 12 & (16-\lambda) \end{vmatrix} = (\lambda-9)(\lambda-16) - 144$$

$$= (\lambda^2 - 25\lambda + 144) - 144 = \lambda(\lambda - 25) = 0$$

for $\lambda_1 = 25$ og $\lambda_2 = 0$.

$\lambda_1 = 25$:

$$\begin{bmatrix} (9-25) & 12 \\ 12 & (16-25) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} -16x_1 + 12x_2 &= 0 \\ 12x_1 - 9x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Dette gir $x_2 = \frac{4}{3}x_1$. Enhetsvektor:

$$\mathbb{v}_1 = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} \qquad (\text{siden } 3^2 + 4^2 = 5^2)$$

$\lambda_2 = 0$:

$$\begin{bmatrix} (9-0) & 12 \\ 12 & (16-0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} 9x_1 + 12x_2 &= 0 \\ 12x_1 + 16x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Dette gir: $x_2 = -\frac{3}{4}x_1$. Enhetsvektor.

$$\mathbb{v}_2 = \begin{bmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$$

Altså blir $P = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

Vi har da:

$$9x^2+24xy+16y^2-20x+15y=0$$

går over til:

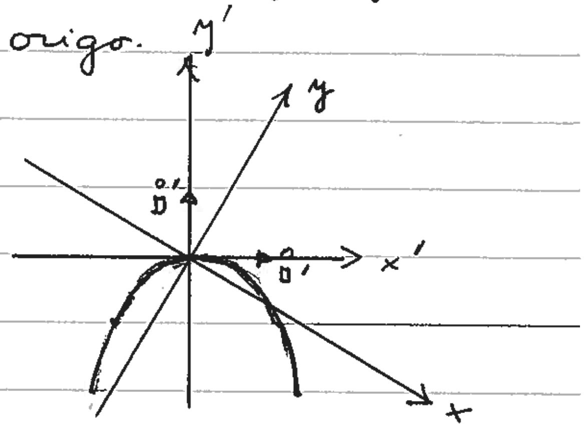
$$25x'^2+0y'^2-20\left(\tfrac{3}{5}x'-\tfrac{4}{5}y'\right)+15\left(\tfrac{4}{5}x'+\tfrac{3}{5}y'\right)=0$$

eller:

$$25x'^2+16y'+9y'=0\ ;\quad 25x'^2+25y'=0,$$

eller: $\quad x'^2+y'=0$

Dette blir en parabel i $x'y'$-systemet med topp-punkt i origo.



Det gjenstår da bare å finne xy-systemet i forhold til det angitte $x'y'$-system.

Vi har for

$\mathbf{i}'$: $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\ \frac{4}{5}\end{bmatrix}$ ($\mathbf{i}'$ ligger i 1. kvadrant i xy-systemet.)

For $\mathbf{j}'$ har vi:

$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{4}{5}\\ \frac{3}{5}\end{bmatrix}$ ($\mathbf{j}'$ ligger i 2. kvadrant i xy-systemet.)