Norges teknisk-
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA1201 Lineær algebra og geometri
Løsningsforslag for eksamen gitt 3. desember 2007

Oppgave 1

a) Vi ser på ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & 3\alpha z & = & 2 \\ 2x & + & & & 2z & = & \beta \end{array}$$

hvor α og β er konstanter. Skriver ligningssystmet på utvidet matriseform, for deretter å finne den reduserte trappeformen:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 3\alpha & 2 \\ 2 & 0 & 2 & \beta \end{array}\right] \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-2R_1} \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 3(\alpha+2) & 0 \\ 0 & -4 & 8 & \beta-2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3+\frac{4}{3}R_2}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 3(\alpha+2) & 0 \\ 0 & 0 & -4\alpha & \beta-2 \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{1}{4}R_3]{-\frac{1}{3}R_2} \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -(\alpha+2) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \frac{1}{2}-\frac{\beta}{4} \end{array}\right].$$

(Her betyr $R_i - a \cdot R_j$ rad i minus konstanten a gange rad j.)

Fra dette ser vi enkelt at vi har

(i) ingen løsning når $\alpha = 0$ og $\beta \neq 2$;

(ii) uendelig mange løsninger når $\alpha = 0$ og $\beta = 2$;

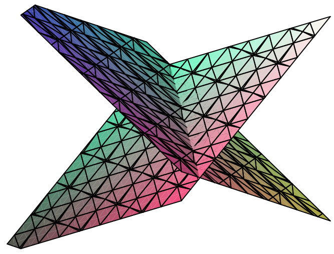
(iii) nøyaktig én løsning for $\alpha \neq 0$ og β vilkårlig valgt.

b) Den reduserte trappeformen for $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ er:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Skal så finne en parametrisering av den rette linjen som er snittet av de to planene gitt ved ligningene

$$x + 2y - 3z = 1 \quad \text{og} \quad 2x + y + 3z = 2.$$



Med andre ord ønsker vi $x, y, z \in \mathbb{R}$ slik at

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{første del}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right],$$

det vil si, $z = t \in \mathbb{R}$ slik at $y = 3z = 3t$ og $x = 1 - 3z = 1 - 3t$. I figuren til høyre vises snittet av de to planene.
Altså er en parametrisering av den rette linjen som er snittet av de to planene gitt ved

$$t \mapsto t(-3, 3, 1) + (1, 0, 0).$$

Oppgave 2

Vi skal bestemme alle tall z i det komplekse plan slik at $z^3 = 1 - \sqrt{3}i$.
Skriver $1 - \sqrt{3}i$ på polarform (vi merker oss at dette punktet ligger i fjerde kvadrant):

$$1 - \sqrt{3}i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)\right),$$

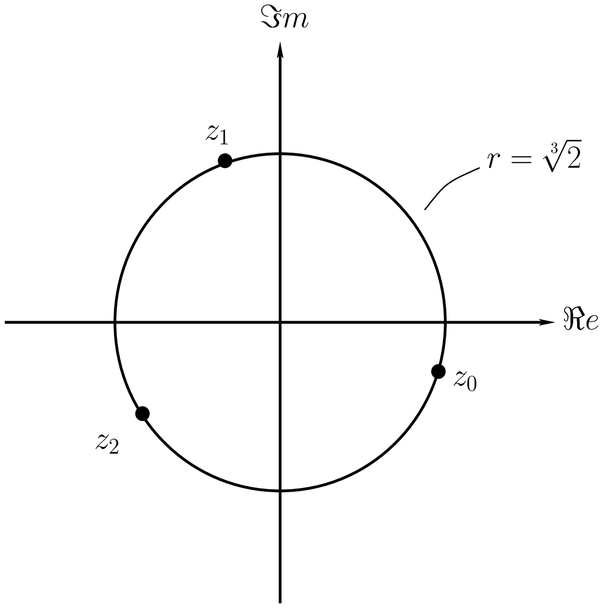
der $k \in \mathbb{Z}$. Dette betyr at

$$z = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi\right)\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Altså har $z^3 = 1 - \sqrt{3}i$ følgende løsninger

$k = 0$: $z_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{9}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{9}\right)\right)$;
$k = 1$: $z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{9}\right)\right)$;
$k = 2$: $z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{9}\right)\right)$

som vi kan illustrere på følgende figur:



Oppgave 3

a) Vi skal finne $T_A(x, y)$ og $T_B(x, y, z)$. Vi har at

$$T_A(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (x - 3y, 5y, 0)$$

og

$$T_B(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (x - 2y + 4z, -2x + 4y - 8z).$$

Fra uttrykket for $T_A(x, y)$ får vi at $T_A(4, -5) = (19, -25, 0)$.

b) En lineær transformasjon $T \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er **én-entydig (injektiv)** dersom $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$ medfører at $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. (Kommentar: Det kan vises at en lineær transformasjon er én-entydig dersom $T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ hvis og bare hvis $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.)

For å avgjøre om T_A er én-entydig eller ei ser vi på om hvorvidt $T_A(x, y) = T_A(x', y')$ medfører at $x = x'$ og $y = y'$. Fra **a)** har vi at $T_A(x, y) = (x - 3y, 5y, 0)$ og $T_A(x', y') = (x' - 3y', 5y', 0)$. Setter vi disse like får vi med andre ord

$$(x - 3y, 5y, 0) = (x' - 3y', 5y', 0)$$

som gir $y = y'$. Dette gir igjen at $x = x'$. Altså **er** T_A én-entydig.

Skal så bestemme standardmatrisen til den sammensetningen som avbilder $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Dette er sammensetningen $T_B \circ T_A$. Med andre ord,

$$\begin{aligned}[T_B \circ T_A] &= [T_B] \cdot [T_A] = BA \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -13 \\ -2 & 26 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

$T_B \circ T_A$ er **ikke** invertibel da $\det[T_B \circ T_A] = 26 - 26 = 0$.

Oppgave 4

a) For å vise at den oppgitte matrisen A har egenverdier lik -4 og 16 ser vi på den karakteristiske lignignen

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - A) &= (\lambda - 11)(\lambda - 1) - (5\sqrt{3})^2 \\ &= \lambda^2 - 12\lambda + 11 - 75 \\ &= \lambda^2 - 12\lambda - 64 \\ &= (\lambda + 4)(\lambda - 16) \\ &= 0\end{aligned}$$

som har løsning $\lambda_1 = -4$ og $\lambda_2 = 16$. Alstå har A egenverdier lik $\lambda_1 = -4$ og $\lambda_2 = 16$.

b) For å finne en ortogonal matrise P og diagonalmatrise D, slik $P^{-1}AP = D$, finner vi egenvektorene tilhørende egenverdiene til A.

λ_1: $A\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v} = -4\mathbf{v} \iff (-4I - A)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Dette gir oss et ligningssystem med én ligning og to variabler, så vi har med andre ord en fri variabel. Egenvektoren vil være på formen $\mathbf{v} = t(-1, \sqrt{3})$ der $t \in \mathbb{R}$. Normerer vi $\mathbf{v}$ får vi den normaliserte egenvektoren tilhørende λ_1, $\mathbf{v}_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

λ_2: $A\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v} = 16\mathbf{v} \iff (16I - A)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Dette gir oss et ligningssystem med én ligning og to variabler, så vi har med andre ord en fri variabel. Egenvektoren vil være på formen $\mathbf{v} = t(\sqrt{3}, 1)$ der $t \in \mathbb{R}$. Normerer vi $\mathbf{v}$ får vi den normaliserte egenvektoren tilhørende λ_1, $\mathbf{v}_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

(Kommentar: Vi har brukt $t = -1$ for $\mathbf{v}_2$ fordi vi ønsker å la $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ være henholdsvis første og andre søyle i en ortogonalmatrise P med determinant lik 1.)

Dette gir oss følgende ortogonale matrise P og diagonalmatrise D:

$$P = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}.$$

Med disse verdiene for P og D har vi at $P^{-1}AP = P^T AP = D$.

(Kommentar: Det er fire forskjellige muligheter for hva P og D kan være. I tillegg til den gitt over er følgende også riktige alternativer

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

hvor vi i det første alternative har samme ligning for kjeglesnittet i **c)**, mens i de to siste alternativene har byttet om på x' og y' i ligningen for kjeglesnittet på standardform i **c)** i forhold til de to første alternativene.)

Den geometriske fortolkningen til P er en rotasjon av planet med

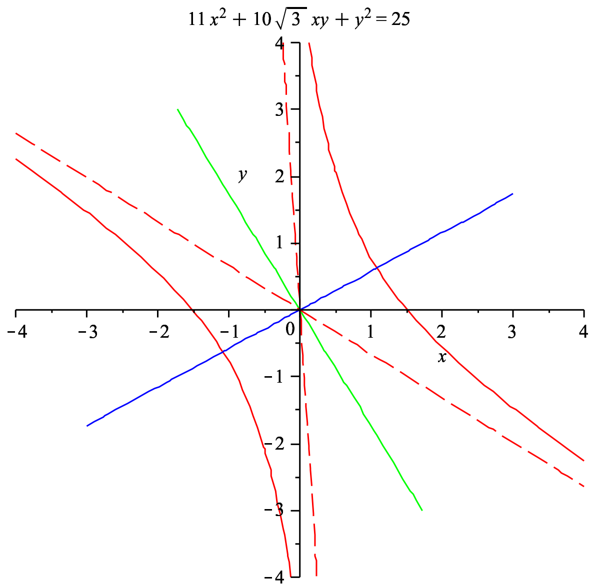
$$\theta = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2}{3}\pi.$$

(Kommentar: De tre andre alternativene, i denne rekkefølgen de er gitt over, gir en rotasjon på henholdsvis $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$ og $\frac{7\pi}{6}$.)

c) Betrakter så kjeglesnittet. Dette kan også skrives som

$$\begin{aligned} 11x^2 + 10\sqrt{3}xy + y^2 = 25 &\iff \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 25 \\ &\iff \underbrace{\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} P}_{[x' \; y']} D \underbrace{P^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}} = 25 \\ &\iff \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 25 \\ &\iff -4(x')^2 + 16(y')^2 = 25 \\ &\iff \left(\frac{y'}{5/4}\right)^2 - \left(\frac{x'}{5/2}\right)^2 = 1 \end{aligned}$$

der A, P og D er som i **b)**. Skissert i xy-koordinatsystemet får vi følgende figur:



I figuren markerer de stiplede linjene asymptotene til parablene, mens x'-aksen er merket grønn og y'-aksen er merket blå.

Oppgave 5

a) Skal vise at $A = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right]$ har kun reelle egenverdier. Ser på

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - A) &= (\lambda - a)(\lambda - c) - b^2 \\ &= \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

som gir

$$\lambda = \frac{a+c}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a+c)^2 - 4ac + 4b^2} = \frac{a+c}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}.$$

I og med at $(a-c)^2 + 4b^2 \geq 0$ for alle verdier av a, b og c vil λ være reell. Altså har A kun reelle egenverdier.

b) Fra antagelsen om at λ er en egenverdi for B vet vi at for en (egen)vektor $\mathbf{v}$ gjelder det at

$$B\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

så

$$B^2\mathbf{v} = B(B\mathbf{v}) = B(\lambda\mathbf{v}) = \lambda B\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v}.$$

Altså er λ^2 en egenverdi for B^2.

Som et moteksempel på at den motsatte implikasjonen ikke er sann, la

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

som har den kjente geometriske fortolkningen rotasjon av planet med $\frac{\pi}{2}$. Med dette valget av B får vi

$$B^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

som har egenverdi $\gamma = -1$. I og med at $\sqrt{\gamma} = i \notin \mathbb{R}$ har vi nå et eksempel på at en reell egenverdi γ for B^2 ikke medfører at $\sqrt{\gamma}$ er en reell egenverdi for B.