

(A)

LØSNINGER:Oppgave 1:

(a) Vi har:

$$5 \cdot 1 - 14 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 9 = 0$$

Altså ligger punktet $P(1,1,0)$ i planen (α) . Videre har vi:

$$-10 \cdot 1 + 28 \cdot 1 - 4 \cdot 0 - 17 = 1 \neq 0$$

Altså ligger punktet ikke i planen (β) .

Vi observerer at planene har normalvektorene $(5, -14, 2)$ og $(-10, 28, -4)$, og (α) og (β) er derfor parallelle.

Avstanden mellom planene er derfor lik avstanden fra $P(1,1,0)$ til

planen (β) :

$$d(\alpha, \beta) = \frac{|-10 \cdot 1 + 28 \cdot 1 - 4 \cdot 0 - 17|}{\sqrt{10^2 + 28^2 + 4^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{900}} = \underline{\underline{\frac{1}{30}}}$$

$$(b) \quad \alpha \times \beta = \begin{vmatrix} \overset{0}{i} & \overset{0}{j} & \overset{0}{k} \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 12\overset{0}{i} - 4\overset{0}{j} + 8\overset{0}{k}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \frac{\alpha \times \beta}{\|\alpha \times \beta\|} = \frac{(12, -4, 8)}{\sqrt{12^2 + 4^2 + 8^2}} = \frac{(12, -4, 8)}{4\sqrt{14}} \\ &= \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}} \right) \end{aligned}$$

Siden α , β og $\alpha \times \beta$ utgjør et høysesystem, må også α , β og $\mathbf{c}$ utgjøre et høysesystem. Dessuten er $\mathbf{c} \perp \alpha$ og $\mathbf{c} \perp \beta$ og

$$\|\mathbf{c}\| = 1. \quad \text{Moteksempel:}$$

$$(c) \quad \overset{0}{i} \cdot 2\overset{0}{j} = 0 = \overset{0}{i} \cdot \overset{0}{j} \quad \text{og} \quad 2\overset{0}{j} \neq \overset{0}{j}. \quad \text{Galt!}$$

(B)

OPPGAVE 2:

- (a) Utsagnet er galt! Moteksempel:
A er 2×3 -matrise og B er 3×2 -matrise.
- (b) Utsagnet er riktig! Det faktum at AB og BA begge er definert gir at hvis A er $m \times n$, så må B være $n \times m$. Da blir AB en $m \times m$ -matrise og BA en $n \times n$ -matrise. Siden dessuten $AB = BA$ må $m = n$.

OPPGAVE 3:

- (a) $-16 = 16(\cos \pi + i \sin \pi)$
Settes så $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, får vi:
 $z^4 = r^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta)$. Ut fra $z^4 = -16$ får vi dermed
 $r^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta) = 16(\cos \pi + i \sin \pi)$

Dette gir $r = 2$ og dessuten

følgende muligheter for θ :

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}, \\ \theta_3 = \frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}, \quad \theta_4 = \frac{\pi}{4} + \frac{6\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

Røttene blir derfor:

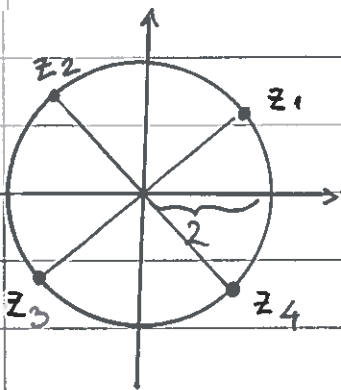
$$z_1 = 2(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_2 = 2(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_3 = 2(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$z_4 = 2(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

(c)



$$(b) (x - z_0)(x - \bar{z}_0)$$

$$\equiv x^2 - (2\operatorname{Re} z_0)x + |z_0|^2$$

der $2\operatorname{Re} z_0$ og $|z_0|^2$ er reelle.

Vi har fra (a)

$$z^4 + 16 \equiv (z - z_1)(z - z_4)(z - z_2)(z - z_3)$$

$$\equiv (z - z_1)(z - \bar{z}_1) \cdot (z - z_2)(z - \bar{z}_2)$$

$$\equiv (z^2 - (2\operatorname{Re} z_1)z - |z_1|^2)(z^2 - (2\operatorname{Re} z_2)z + |z_2|^2)$$

$$\equiv (z^2 - 2\sqrt{2}z + 4)(z^2 + 2\sqrt{2}z + 4)$$

OPPGAVE 4:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 7 \\ 0 & 1 & 1 & | & 5 \\ 2 & 2 & 0 & | & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 7 \\ 0 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 2 & -2 & | & -15 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 7 \\ 0 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & -4 & | & -25 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{4}} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 7 \\ 0 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{25}{4} \end{bmatrix} \xrightarrow{-1} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{25}{4} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{3}{4} \\ x_2 &= -\frac{5}{4} \\ x_3 &= \frac{25}{4} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & | & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & | & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{4}} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \xrightarrow{-1} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Vi har dermed vist at A er invertierbar.

(D)

(c) $Ax = b$ gir

$x = A^{-1}b$ eller:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{5}{4} \\ \frac{25}{4} \end{bmatrix}$$

OPPGAVE 5:

(a) Vi antar først at $\lambda = 0$ er en egenverdi. Dette gir:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a-0) & b \\ c & (d-0) \end{vmatrix} = 0$$

Omvendt om vi antar at

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 0, \text{ så gjelder}$$

$$\begin{vmatrix} (a-0) & b \\ c & (d-0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} (b) \quad |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} (9-\lambda) & 12 \\ 12 & (16-\lambda) \end{vmatrix} = (9-\lambda)(16-\lambda) - 144 \\ &= \lambda^2 - 25\lambda + 144 - 144 = \lambda^2 - 25\lambda = \lambda(\lambda - 25) \end{aligned}$$

$$\underline{\lambda_1 = 25}, \quad \underline{\lambda_2 = 0}$$

$$A v_1 = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 \\ 100 \end{bmatrix} = 25 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 25 v_1$$

$$A v_2 = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} = 0 v_2$$

Altså er v_1 og v_2 egenvektorer

svarende til henholdsvis $\lambda_1 = 25$ og $\lambda_2 = 0$.

(c) Vi har at $\|v_1\| = 5$ og $\|v_2\| = 5$

Vi velger derfor:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}, \text{ og får:}$$

$$\det P = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1.$$

(E)

$$p(x,y) = 9x^2 + 24xy + 16y^2$$

$$= [x \ y] \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

$$= \mathbf{x}'^T (\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}) \mathbf{x}' = \mathbf{x}'^T \mathbf{D} \mathbf{x}'$$

$$= [x' \ y'] \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underline{25x'^2}$$

(d) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 20x + 15y = 0$

Vi har da fra

$$\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{x}'$$

at :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

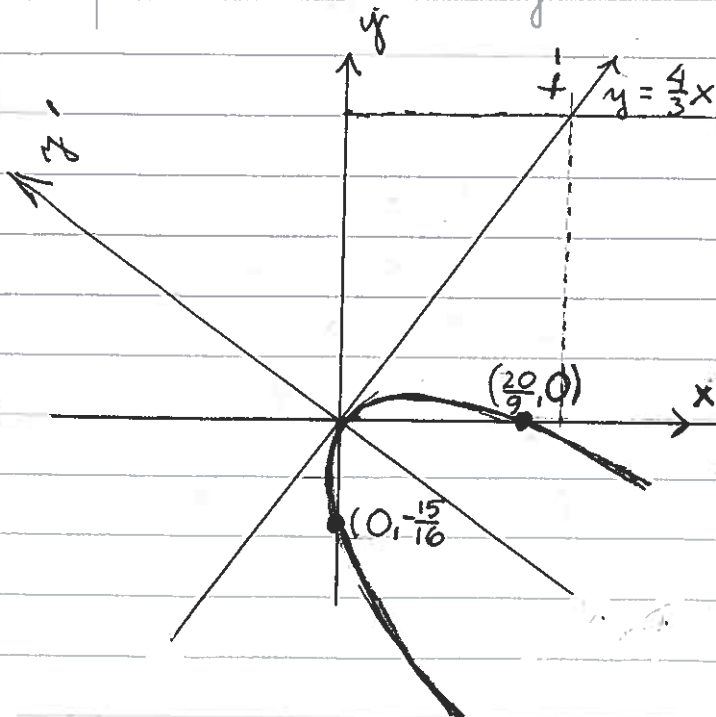
Dette gir: $x = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y'$, $y = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'$.

Indsættes de nye variabler i ligningen for hæglesmidt, får vi:

$$25x'^2 - 20\left(\frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y'\right) + 15\left(\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'\right) = 0$$

eller: $25x'^2 + 25y' = 0$ eller:

$$y' = -x'^2.$$



Kurven blir
altså en
parabel.

Vi har desuden
at $(1,0)$ i $x'y'$ -sy-
stemet får koordinat-
ene $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ i xy -systemet
og at $(0,1)$
får koordinatene
 $(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ i xy -systemet.

Oppgave 6

Anta $A^2 = A$. Dersom λ er en egenverdi til A med tilhørende egenvektor $\underline{x}$, har vi at

$$A\underline{x} = \lambda \underline{x}$$

Se på følgende (her er $\underline{x}$ egenvektor til A)

$$A^2\underline{x} = A(A\underline{x}) = A(\lambda \underline{x}) = \lambda A\underline{x} = \lambda^2 \underline{x}$$

Siden $A^2 = A$ har vi også at

$$\lambda \underline{x} = A\underline{x} = A^2\underline{x} = \lambda^2 \underline{x}$$

Dette gir

$$\lambda^2 \underline{x} = \lambda \underline{x} \iff \lambda^2 \underline{x} - \lambda \underline{x} = 0 \iff \lambda(\lambda - 1) \underline{x} = 0$$

Da $\underline{x}$ er en egenvektor har vi at $\underline{x} \neq 0$,
dette gir da $\lambda(\lambda - 1) = 0 \iff \lambda = 0 \vee \lambda = 1$.

□