MA 1201, LØSNING:

EKSAMEN, 22/5-08

OPPGAVE 1:

(a) Vi skal löse ligningssystemet:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & -2 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} -3 \; -1 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 10 & -8 & -12 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ -10 \end{matrix} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 48 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -\frac{1}{8} \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ 1 \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ -2 \end{matrix} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -1 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} x_1 &= 2 - 10x_4 \\ x_2 &= 6x_4 \\ x_3 &= -1 + 6x_4 \\ x_4 &= x_4 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -10 \\ 6 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) $$AX = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Vi får da ligningsystemene:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 6x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 5x_3 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 5x_2 + 6x_4 &= 3 \\ 4x_2 + 5x_4 &= 2 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \frac{1}{5} \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \\ 4 & 5 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} -4 \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{array}\right] \begin{matrix} \\ 5 \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \qquad \underline{x_3 = -3} \qquad \underline{x_1} = \frac{2}{5} - \frac{6}{5}x_3 = \frac{20}{5} = \underline{4}$$

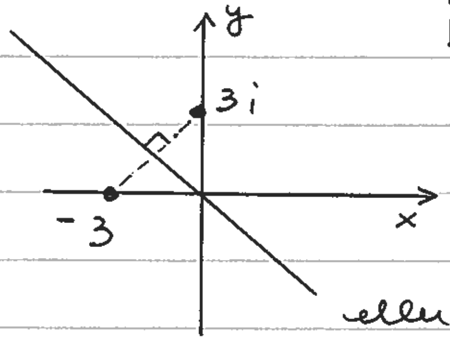
$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{array}\right]\frac{1}{5} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{6}{5} & \frac{3}{5} \\ 4 & 5 & 2 \end{array}\right]^{-4} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{6}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right]5$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{6}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \qquad \underline{x_4 = -2} \qquad \underline{x_2} = \frac{3}{5} - \frac{6}{5}x_4 = \frac{3}{5} + \frac{12}{5} = \underline{3}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

OPPGAVE 2:

Vi söker mengden av alle punkter i det komplekse plan som har samme avstand fra $3i$ som fra -3.



Dette blir midtnormalen på linjestykket som forbinder de to punktene:

$$y = -x$$

eller $\underline{z = x - ix = (1-i)x}$

OPPGAVE 3:

(a) $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som roterer alle punkter i en sirkelbue på $\frac{\pi}{3}$ omkring z-aksen, mens z-koordinaten er uendret:

NB! Liten regnefeil i tidligere fasit!

$$A = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Et punkt med koordinater $P(x, y, z)$ sendes til $P'(x, 0, z)$ ved $T_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

NB: Uttrykket "xyz-planet" er galt!!

③

(b) Vi vet at $T_B \circ T_A = T_{BA}$.

Vi har derfor:

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[NB! Her blir det tidligere svaret i (a) feil, slik at også BA blir feil!]

Siden $\det(BA) = 0$ er BA ikke invertibel.

OPPGAVE 4:

(a) $$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} (2-\lambda) & 2 \\ 2 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 4$$

$$= 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 4\lambda = \lambda(\lambda - 4) = 0$$

Altså er egenverdiene:

$$\lambda_1 = 4 \quad , \quad \lambda_2 = 0$$

(b) Vi bestemmer egenvektorene til disse to egenverdier:

$\lambda_1 = 4$: $\left[\begin{array}{cc|c} (2-4) & 2 & 0 \\ 2 & (2-4) & 0 \end{array}\right]$ gir $\begin{array}{r} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{array}$

Altså $x_2 = x_1$; $w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $v_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 0$: $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right]$ gir $\begin{array}{r} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{array}$

Altså $x_2 = -x_1$; $w_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

Dette gir: $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, som i følge teorien gir:

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

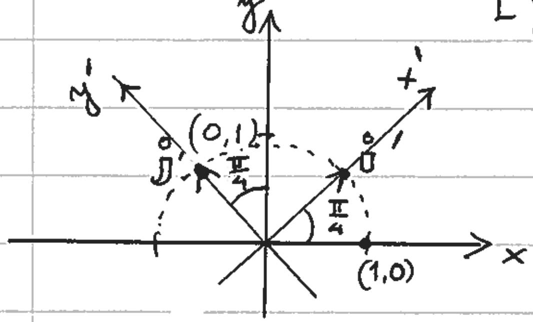
$\det P = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{1}$

Den geometriske fortolkning framkommer når vi ser på koordinatskiftet:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Her ser vi at den ene basisvektor $\mathbf{i}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $x'y'$-systemet får koordinaten $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ i det opprinnelige xy-systemet.

Den andre basisvektoren $\mathbf{j}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ får koordinatene: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ i xy-systemet



Altså er det nye koordinatsystemet dreid $\frac{\pi}{4}$ i positiv omdreiningsretning i forhold til det gamle.

(c) Vi har da at:

$$2x^2 + 4xy + 2y^2 = [x\ y] \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= [x'\ y'](P^{-1}AP)\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = [x'\ y']\, D \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$= 4x'^2$$

Videre har vi:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' \quad , \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'$$

Altså har vi:

$$2x^2 + 4xy + 2y^2 + 3\sqrt{2}\,x - \sqrt{2}\,y = 0$$

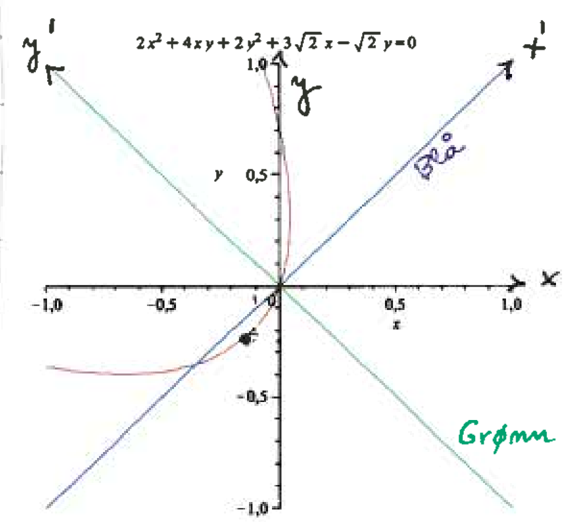
$$4x'^2 + 3(x' - y') - (x' + y') = 0$$

$$4x'^2 + 2x' - 4y' = 0$$

$$y' = x'^2 + \frac{1}{2}x' \quad \text{eller} \quad y' + \frac{1}{16} = x'^2 + \frac{1}{2}x' + \frac{1}{16}$$

$$\left(y' + \frac{1}{16}\right) = \left(x' + \frac{1}{4}\right)^2$$

Dette blir en parabel med topp-punkt i $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{16}\right)$ i $x'y'$-systemet. Videre ser vi at den skjærer x'-aksen i punktene $(0,0)$ og $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$



Figuren til høyre er en skissé av $2x^2 + 4xy + 2y^2 + 3\sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0$ i xy-planet der x'-aksen er merket blått og y'-aksen er merket grønn. Legg merke til parabelen skjærer x'-aksen for $x' = -\frac{1}{2}$ og $x' = 0$.

Oppgave 5

a) For å vise $B = C$ se på $B = IB = CAB = CI = C$ der vi har benyttet at $AB = I = CA$. Dette betyr at A har en venstre og en høyre invers. Med andre ord er A invertibel.

b) (i) Moteksempel: La $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (begge er invertible matriser). Det gir at $AB = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, mens $BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

(ii) Ved å gange begge sider av ligningen $AB\mathbf{x} = \mathbf{0}$ med A^{-1} fra venstre får vi at $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Dersom $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ hvis og bare hvis $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er B invertibel (ettersom vi har per antagelse at B er en $(n \times n)$-matrise der n er et positivt heltall). Ettersom B ikke trenger å være invertibel kan vi også ha ikketrivielle løsninger for ligningen $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Altså er påstanden motbevist.

(iii) La A være en ortogonal $(n \times n)$-matrise (n positivt heltall). Da har vi at $A^T = A^{-1}$. Ettersom $\det A = \det A^T$ (som gjelder generelt uavhengig av hvorvidt A er ortogonal eller ei) har vi fra $AA^T = I$ at $\det A \det A^T = (\det A)^2 = \det I = 1$ slik at $\det A = \pm 1$.

TIL MA1201 - STUDENTENE

FRA Per Hag

Konferansetimer foran eksamen:

Jeg blir opptatt med eksamen i geometri mandag 1/12.

Tirsdag; 2/12: kl. 10-12 og 13-14.

Onsdag; 3/12: kl. 11-12 og 13-14.

på kontoret (938) i 9. etasje S II.