LØSNINGER:

Oppg. 1:

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 7 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{c} \\ 2 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 7 & 0 & 2 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{c} \\ \\ -2\ \ -1 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 7 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Löningen blir:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 14 - 7x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 3 \end{array}\right\} \ x_2 \text{ velges fritt.}$$

NB! Bare ~1/3 hadde denne enkle løsning

Oppg. 2:

Byttes to rekker skifter $\det(A)$ fortegn.
Byttes to identiske rekker får vi forsatt $\det(A)$
Altså er $\det(A) = -\det(A)$, m.a.o. $\det(A) = 0$
[NB! Når $x = -x$, vil $2x = 0$ ved overflytting!!]

Oppgave 3:

(a) Antar at planets ligning er

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Innsetting gir:

$$5A - 9C + D = 0$$

$$1A + 2B - 7C + D = 0$$

$$4A + 2B - 13C + D = 0$$

Ligningssystemet blir m.a.o.:

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 5 & 0 & -9 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -7 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -13 & 1 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{c} \\ -5\ \ -4 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc:c} 0 & -10 & 26 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 15 & -3 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{c} \\ \\ -\frac{1}{6} \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -10 & 26 & -4 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{c} \\ -2\ \ 10 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{c} \\ \\ 2\ \ \frac{5}{2} \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} A = -2D \\ B = -3D \\ C = -D \\ D = D \end{array}$$

Planets ligning blir:

$$\underline{2x + 3y + z = 1}$$

Alternative Lösningsmetoder:

(i) Vi bestemmer en normalvektor til det søkte plan:

$\vec{PQ} = (-4,2,2)$, $\vec{PR} = (-1,2,-4)$

$$\vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = (-12,-18,-6)$$

$= -6(2,3,1)$. Altså blir ligningen:

$$2(x-5) + 3(y-0) + 1(z+9) = 0$$

siden $(5,0,-9)$ er et punkt i planet:

Forenkling gir:

$$2x + 3y + z - 10 + 9 = 0$$

eller $2x + 3y + z - 1 = 0$

(ii) Parameterframstilling:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -9 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \quad ; \quad s,t \in \mathbb{R}$$

[Ulempen ved denne løsningen er at den ikke gir en enkel formel for avstand mellom punkt og plan som trengs i punkt (b).]

MERKNAD TIL OPPGAVE 5 (se ark D!)

Her glemmer mange at forkorting med 0 ikke er lovlig!! Husk at

$$2 \cdot 0 = 3 \cdot 0, \text{ men allikevel er } 2 \neq 3.$$

Derfor må tilfellet $\det(A) = 0$ behandles spesielt i denne oppgaven.

Dette poeng er understreket på forelesning og i forbindelse med øving/test!!

(b) $d = \dfrac{|2\cdot 0 + 3\cdot 0 + 1\cdot 0 - 1|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}$

er avstanden fra origo til planet.

Volumet av parallellepipedet er lik 6 × volumet til tetraedet, $v(T)$; m.a.o.:

NB! Svært få (nesten ingen) husket denne enkle formel fra s. 166, A/R

$$v(T) = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 5 & 0 & -9 \\ 1 & 2 & -7 \\ 4 & 2 & -13 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}|-6| = \underline{1}$$

Alternativ metode for å beregne $v(T)$:

Arealet av parallellogramet i planet diskutert i (a):

$$\|\vec{PQ} \times \vec{PR}\| = \left\|\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix}\right\| = \|-12\mathbf{i} - 18\mathbf{j} - 6\mathbf{k}\|$$

$$= \sqrt{(12)^2+(18)^2+(6)^2} = 6\sqrt{2^2+3^2+1^2} = 6\sqrt{14}$$

Multiplisere dette areal med $\frac{1}{6}$ × høyden:

$$v(T) = \frac{1}{6}\, 6\sqrt{14} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} = \underline{1}$$

Oppgave 4:

Bevist på forelesning!

(a) $BA = I$ og $AC = I$

Første likhet gir:

$(BA)C = IC = C$

Andre likhet gir:

$B(AC) = BI = B$

$(BA)C = B(AC)$ p.g.a. assosiativitet

Altså: $\underline{C = B}$

Gjennomgått på forelesning. Se s. 54 A/R.

(b) Anta at $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ er en løsning av

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

d.v.s. at: $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$

Vi har da:

$$\underline{\mathbf{0}} = B\mathbf{0} = B(A\mathbf{x}_0) = (BA)\mathbf{x}_0 = I\mathbf{x}_0 = \underline{\mathbf{x}_0}$$

Oppgave 5:

Vi har generelt for $n \times n$-matrise A:

$$\det(\lambda A) = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda^n \det(A)$$

Multiplikasjonssetningen for determinanter gir for to $n \times n$-matriser gjelder:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Vi antar som kjent at:

$$(\nabla) \qquad \underline{A \cdot \operatorname{adj}(A) = \det(A) \cdot I}$$

Vi får da:

$$\det(A) \cdot \det(\operatorname{adj}(A)) = \det(A)^n \cdot 1$$

(i) Hvis $\det(A) \neq 0$ får vi ved å forkorte:

$$\det(\operatorname{adj}.(A)) = \det(A)^{n-1}$$

(ii) Dersom $\det(A) = 0$, vil vi bevise at også $\det(\operatorname{adj}(A)) = 0$ slik at

$$\det(\operatorname{adj}(A)) = \det(A)^{n-1}$$

også i dette tilfellet. Vi antar derfor at $\det(\operatorname{adj}(A)) \neq 0$. Da er $\operatorname{adj}(A)$ invertibel og vi multipliserer i (∇) med $\det(A)^{-1}$ til høyre:

$$A = A(\operatorname{adj}(A) \operatorname{adj}(A)^{-1}) = \det(A) \operatorname{adj}(A)^{-1} = \mathbb{O}$$

denne er $= 0$ p.antagelse!

Altså: $\quad A = \mathbb{O}$

Men da er også $\operatorname{adj}(A) = \mathbb{O}$ og $\det(\operatorname{adj} A)$ må være null. Altså har vi fått en selvmotsigelse.

M.a.o. $\quad \det(A) = 0 \Rightarrow \det(\operatorname{adj}(A)) = 0.$

Vi har altså også i dette tilfellet at:

$$\det(\operatorname{adj}(A)) = \det(A)^{n-1}.$$

(Se merknad på s (B))

Oppgave 6:

(a) $-81 = 3^4(\cos\pi + i\sin\pi)$

Vi setter $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ og får ligningen:

$$r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = 3^4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

Da blir $r = 3$ og videre:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4},\quad \theta_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4},\quad \theta_3 = \frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{\pi},\quad \theta_4 = \frac{\pi}{4} + \frac{6\pi}{4}$$

d.v.s. $\theta_1 = \frac{\pi}{4},\quad \theta_2 = \frac{3\pi}{4},\quad \theta_3 = \frac{5\pi}{4},\quad \theta_4 = \frac{7\pi}{4}$

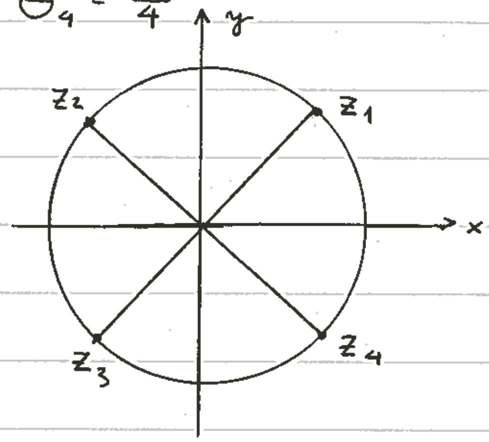
$\theta_5 = \frac{\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi \sim \theta_1$, o.s.v.

$$z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}} + i\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$z_2 = 3\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{3}{\sqrt{2}} + i\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$z_3 = 3\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{3}{\sqrt{2}} - i\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$z_4 = 3\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$



(b)

$$(z - z_1)(z - z_4) = (z - z_1)(z - \bar{z}_1) = z^2 - 2\mathrm{Re}(z_1)z + |z_1|^2$$

$$(z - z_2)(z - z_3) = (z - z_2)(z - \bar{z}_2) = z^2 - 2\mathrm{Re}(z_2)z + |z_2|^2$$

Siden $2\mathrm{Re}(z_1) = 3\sqrt{2}$ og $2\mathrm{Re}(z_2) = -3\sqrt{2}$, får vi faktoriseringen:

$$\underline{x^4 + 81 = (x^2 - 3\sqrt{2}\,x + 9)(x^2 + 3\sqrt{2}\,x + 9)}$$

Oppgave 7:

(a) Vi antar altså at $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$

Vi bestemmer egenverdiene ved å løse:

$$(a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 = \lambda^2 - (a+c)\lambda + (ac - b^2) = 0.$$

Diskriminanten blir da: $(a+c)^2 - 4\cdot 1\cdot(ac - b^2)$

$$= a^2 + 2ac + c^2 - 4ac + b^2 \overset{NB!}{=} (a-c)^2 + b^2 \geq 0,$$

og bare likhet dersom $a = c$ og $b = 0$. Altså har ligningen to reelle røtter og matrisen har to reelle distinkte egenverdier.

(b)

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad \text{der } \underline{0 = ab + bc} = \underline{b(a+c)},$$
$$\underline{a^2+b^2=1} \quad \text{og} \quad \underline{b^2+c^2=1}$$

NB! Her trenger man ikke regne ut hele $\lambda^2 - (a+c)\lambda + ac = 0$ og bruke formel for å finne røtter $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = c$

(i) Anta $b = 0$:

Da har vi $(a-\lambda)(c-\lambda) = 0$.
med egenverdiene $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = c$

$a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a^2 = 1$; $a = \pm 1$ $\quad \underline{\lambda_1 = \pm 1}$

$b^2 + c^2 = 1 \Rightarrow c^2 = 1$; $c = \pm 1$ $\quad \underline{\lambda_2 = \pm 1}$

(ii) $a + c = 0$: $a = -c$

$$\begin{vmatrix} (a-\lambda) & b \\ b & (\cancel{a}-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda - a)(\lambda + a) - b^2 = 0$$
$$\lambda^2 - a^2 - b^2 = 0$$

$\lambda^2 = a^2 + b^2 = 1$ $\quad \underline{\lambda = \pm 1}$

(c) Vi observerer at

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

både er symmetrisk og ortogonal og ut fra (a) og (b) har vi da at den har egenverdiene $\underline{\lambda_1 = 1}$ og $\underline{\lambda_2 = -1}$

(d) Vi bestemmer de tilhørende egenvektorer.

$\underline{\lambda_1 = 1}$ $\quad \left.\begin{array}{l} \left(\frac{3}{5}-1\right)x_1 + \frac{4}{5}x_2 = 0 \\ \frac{4}{5}x_1 + \left(-\frac{3}{5}-1\right)x_2 = 0 \end{array}\right\}$ eller $\begin{array}{l} -2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 = 0 \end{array}$,

som gir: $x_1 = 2x_2$; $\quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$

$\underline{\lambda_2 = -1}$ $\quad \left.\begin{array}{l} \left(\frac{3}{5}+1\right)x_1 + \frac{4}{5}x_2 = 0 \\ \frac{4}{5}x_1 + \left(-\frac{3}{5}+1\right)x_2 \end{array}\right\}$ eller $\begin{array}{l} 8x_1 + 4x_2 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 = 0 \end{array}$

Må ha: $x_2 = -2x_1$. Altså: $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$

(d) Vi velger da: $P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$. Vi har da at $P^T = P^{-1}$ og ut fra teorien:

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(e) $\frac{3}{5}x^2 + \frac{8}{5}xy - \frac{3}{5}y^2 + x = \frac{17}{20}$

Den kvadratiske formen $\frac{3}{5}x^2 + \frac{8}{5}xy - \frac{3}{5}y^2$ kan skrives på formen:

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

der $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$

Innføres nå $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ får vi:

$$\mathbf{x}'^T (P^T A P) \mathbf{x}' = \mathbf{x}'^T D \mathbf{x}' = x'^2 - y'^2.$$

Altså blir kjeglesnittets ligning i $x'y'$-koordinater:

$$x'^2 - y'^2 + \left[\frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right] = \frac{17}{20}$$

siden $x = \frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'$. Dette gir:

$$\left(x'^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2\right) - \left(y'^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}y' + \left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)^2\right) = \frac{17}{20} + \frac{1}{5} - \frac{1}{20} = 1$$

eller

$$\left(x' + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(y' + \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)^2 = 1$$

Vi får altså en hyperbel med sentrum i $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)$ og asymptoter med stigningstall ± 1 i $x'y'$-systemet.

Siden $\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ og

$\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ ligger

(1,0) i $x'y'$-systemet i 1. kvadrant og
(0,1) i $x'y'$-systemet i 2. kvadrant i xy-systemet.