



Faglig kontakt under eksamen: Eldar Straume
(Telefon 735 96683)

EKSAMEN I MA1201 LINEÆR ALGEBRA OG GEOMETRI

Mandag 3. desember 2007

Tid: kl. 09.00 - 13.00

Tillatte hjelpemidler: Ingen tillatte hjelpemidler.

Bokmål

Alle svar skal begrunnes. Alle punkter veies likt under vurderingen av eksamen.

Sensuren faller 21. desember 2007.

Oppgave 1

a) Vi ser på ligningssystemet

$$\begin{aligned}x + 2y - 3z &= 1 \\2x + y + 3\alpha z &= 2 \\2x + + 2z &= \beta\end{aligned}$$

hvor α og β er konstanter. For hvilke verdier av α og β har ligningssystemet

(i) ingen løsning (ii) uendelig mange løsninger (iii) nøyaktig én løsning?

b) Finn den reduserte trappeformen til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

og finn deretter en parametrisering av den rette linjen som er snittet av de to planene gitt ved ligningene

$$\begin{aligned}x + 2y - 3z &= 1 \\2x + y + 3z &= 2.\end{aligned}$$

Oppgave 2 Bestem alle tall z i det komplekse plan slik at $z^3 = 1 - \sqrt{3}i$. Skriv løsningen(e) på polar form og angi disse på en figur.

Oppgave 3 La $T_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ og $T_B: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være to lineær transformasjoner med standardmatriser lik henholdsvis

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -8 \end{bmatrix}.$$

- a) Regn ut $T_A(x, y)$ og $T_B(x, y, z)$. Hva blir $T_A(4, -5)$?
- b) Avgjør om T_A er **en-entydig (injektiv)**. Bestem standardmatrisen til den sammen-setningen av de to transformasjonene som avbilder \mathbb{R}^2 til \mathbb{R}^2 . Avgjør også om denne transformasjonen er invertibel.

Oppgave 4

a) La matrisen A være gitt som $A = \begin{bmatrix} 11 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$. Vis at egenverdiene til A er lik -4 og 16 .

b) Finn en ortogonal matrise P og en diagonalmatrise D slik at $P^{-1}AP = D$, der A er matrisen gitt i a).

La P være standardmatrisen for lineær transformasjonen $T_P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Hva er den geometriske fortolkningen til denne lineær transformasjonen?

c) Betrakt kjeglesnittet $11x^2 + 10\sqrt{3}xy + y^2 = 25$.

Innfør et nytt koordinatsystem slik at ligningen for kjeglesnittet er på standard form. Skissér kjeglesnittet i xy -koordinatsystemet, men posisjonen til det nye koordinatsystemet skal også merkes tydelig.

Oppgave 5

a) La $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ der a, b og c er vilkårlige reelle tall. Vis at A har kun reelle egenverdier.

b) La B være en $(n \times n)$ -matrise (n et positivt heltall). Anta at det reelle tallet λ er en egenverdi for B . Vis at λ^2 er en egenverdi for B^2 . Gi et moteksempel på at den motsatte implikasjonen ikke er sann (altså at λ^2 egenverdi for B^2 ikke alltid medfører at $\pm\lambda$ er en egenverdi for B).

(Hint: Finn en (2×2) -matrise med en kjent geometrisk fortolkning.)