Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Per Hag, telefon 73591743

Eksamen i MA1201/MA6201 Lineær algebra og geometri

Bokmål
Torsdag 4. desember 2008
Tid: 09.00 - 13:00
Hjelpemidler: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt enkel kalkulator tillatt.

Sensur: Tirsdag 23. desember 2008

Alle svar skal begrunnes. Alle punkter veies likt under vurderingen av eksamen

Oppgave 1

a) Gitt de to planene med likninger:

$$\begin{array}{lr} (\alpha) & 5x - 14y + 2z + 9 = 0 \\ (\beta) & -10x + 28y - 4z - 17 = 0 \end{array}$$

Vis at punktet $P(1,1,0)$ ligger i det ene men ikke i det andre av disse planene.

Beregn avstanden mellom planene gitt ved (α) og (β).

b) Bestem en vektor $\mathbf{c}$ i $\mathbf{R}^3$ som står vinkelrett på begge vektorene $\mathbf{a} = (1,3,0)$ og $\mathbf{b} = (-2,2,4)$, har lengde 1 og dessuten er slik at $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ utgjør et høyresystem.

c) La $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ være tre vektorer i $\mathbf{R}^3$ Gjelder da følgende implikasjon:

"Dersom $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$, så må $\mathbf{v} = \mathbf{w}$"?

Oppgave 2

Er følgende utsagn riktig eller galt? (Gi en kort begrunnelse i hvert av tilfellene.)

i Hvis A og B er matriser som er slik at både AB og BA er definert, så må både A og B være kvadratiske matriser.

ii Hvis A og B er matriser og

$$AB = BA$$

så må både A og B være $n \times n$-matriser for en og samme n.

Oppgave 3

a) Skriv tallet -16 på polarform:

$$r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Benytt dette til å finne alle komplekse røtter til ligningen

$$z^4 + 16 = 0.$$

Angi røttene i det komplekse plan.

b) Begrunn at når z_0 er et komplekst tall, så blir

$$(x - z_0)(x - \overline{z}_0)$$

et polynom i variabelen x med reelle koeffisienter. Benytt dette og a) til å skrive polynomet $x^4 + 16$ som et produkt av to reelle 2. gradspolynom.

Oppgave 4

a) Løs ligningssystemet:

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & & +\,x_3 & = & 7 \\ & x_2 & +\,x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & +\,2x_2 & & = & -1 \end{array}$$

ved Gauss-Jordan-eliminasjon.

b)

$$\text{Gitt matrisen: } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Vis at A er invertibel og bestem A^{-1}.

c) Løs ligningssystemet i a) ved å benytte resultatet i b) og sammenhengen:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

der: $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Oppgave 5

a) Vis at en 2×2-matrise har egenverdi $\lambda = 0$ hvis og bare hvis determinanten er lik 0.

b) Bestem egenverdiene for matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$$

Vis at $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ blir egenvektorer som korresponderer med disse egenverdiene.

c) Benytt b) til å diagonalisere den kvadratiske formen:

$$p(x, y) = 9x^2 + 24xy + 16y^2.$$

d) Benytt b) og c) til å identifisere kjeglesnittet

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 20x + 15y = 0.$$

Lag en skisse av kurven i xy-systemet. (Hvilken type kjeglesnitt blir dette?)

Oppgave 6 La A være en kvadratisk matrise slik at

$$A^2 = A.$$

Bevis at dersom λ er en egenverdi for A, så må $\lambda = 0$ eller $\lambda = 1$.