Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Fagleg kontakt under eksamen:
Per Hag Telefon: 73 59 17 43

EKSAMEN I LINEÆR ALGEBRA OG GEOMETRI (MA1201/MA6201)

Nynorsk
Dato: Onsdag 1. desember 2010
Tid: 09:00 – 13:00

Hjelpemiddel:
Ingen trykte eller handskrivne hjelpemiddel er tilletne. Bestemt enkel kalkulator er tillaten.

Sensur: 22. desember.

Settet inneheld 7 oppgåver med til saman 14 delspørsmål. Alle svar skal grunngjevast og alle delspørsmål vil bli vektlagt likt i vurderinga.

Oppgåve 1
Totalmatrisa til eit likningssytem er redusert ved Gauss eliminasjon til trappeforma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Fullfør Gauss-Jordan eliminasjonen og skriv opp den generelle løysninga til likningssystemet.

Oppgåve 2
Det er kjent at dersom to rader (rows) i ein determinant byttar plass vil den nye determinanten

ha same talverdi, men motsett forteikn i forhold til den opprinnelege. Gje ein kort grunngjevnad for at ein determinant som har to like rader må ha verdi lik null.

Oppgåve 3

a) Bestem ei likning for planet som inneheld punkta $P(5, 0, -9)$, $Q(1, 2, -7)$ og $R(4, 2, -13)$.

b) Finn avstanden fra planet i a) til origo. Bestem deretter volumet av tetraederet med hjørner i $O(0, 0, 0)$, $P(5, 0, -9)$, $Q(1, 2, -7)$ og $R(4, 2, -13)$.

Oppgåve 4
La A, B og C vere $n \times n$-matriser og la I vere identitetsmatrisa av størrelse $n \times n$.

a) Bevis at dersom $BA = I$ og $AC = I$ so må $B = C$. (Ein skal her ikkje gå ut i frå at A er inverterbar.)

b) Bevis at dersom $BA = I$, so vil likningssystemt $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ berre ha den trivielle løysinga $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Oppgåve 5
Ein kan anta at det er kjent at når A er ei $n \times n$ matrise so gjeld

$$A\,\mathrm{adj}(A) = \det(A)I,$$

der $\mathrm{adj}(A)$ er den adjungerte matrisa til A og I er identitetsmatrisa av størrelse $n \times n$.
Bevis at då må

$$\det\left[\mathrm{adj}(A)\right] = \left[\det(A)\right]^{n-1}.$$

Oppgåve 6

a) Skriv -81 på polarkoordinatform. Bruk dette til å bestemmme røttene i likninga

$$z^4 + 81 = 0.$$

Teikn ei skisse som viser røttene i det komplekse planet.

b) Faktoriser, polynomet

$$P(x) = x^4 + 81$$

i reelle polynom av grad opp til 2.

Oppgåve 7

a) Bevis at ei symmetrisk 2×2 matrise alltid har to forskjellige reelle eigenverdier når matrisa ikkje er på forma $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$.

b) Ei ortogonal matrise er ei matrise der kolonnevektorane er ortogonale og har lengde 1. Bevis at ei symmetrisk ortogonal 2×2 matrise berre kan ha eigenverdiene ± 1.

c) Vis, helst ved å bruke a) og b), at matrisa

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

har eigenverdiene $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = -1$.

d) Bestem ei 2×2 matrise P som er slik at

$$P^T A P = D$$

der A er matrisa i c) og der $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

e) Avgjer kva type kjeglesnitt som er gjeve ved likninga

$$\frac{3}{5}x^2 + \frac{8}{5}xy - \frac{3}{5}y^2 + x = \frac{17}{20}.$$

Teikn ei skisse av kurva i xy-koordinatsystemet.