Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Eldar Straume
(Telefon 735 96683/994 10 389)

EKSAMEN I MA1201 LINEÆR ALGEBRA OG GEOMETRI

Torsdag 22. mai 2008
Tid: kl. 09.00 - 13.00
Bokmål

Tillatte hjelpemidler: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt enkel kalkulator (HP30S) tillatt.

Alle svar skal begrunnes. Alle punkter veies likt under vurderingen av eksamen.

Sensuren faller 12. juni 2008.

Oppgave 1

a) Løs ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ der

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) Løs ligningssystemet $AX = B$ (for X) der

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 2 Beskriv løsningsmengden til den komplekse ligningen

$$|z - 3i| = |z + 3|,$$

og skissér den i det komplekse plan.

Oppgave 3 La $T_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være lineær transformasjonen som roterer rommet om z-aksen (rettet oppover) med $\frac{\pi}{3}$ (=60°), og la $T_B\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være lineær transformasjonen som projiserer xyz-planet ortogonalt til xz-planet.

a) Finn standardmatrisene til T_A og T_B.

b) Finn standardmatrisen til sammensetningen $T_B \circ T_A$. Er denne lineær transformasjonen invertibel?

Oppgave 4 La $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right]$.

a) Finn egenverdiene til A.

b) Finn en ortogonal matrise P med determinant lik 1 og en diagonalmatrise D slik at $P^{-1}AP = D$.

Hva er den geometriske fortolkningen av matrisen P?

c) Skissér kjeglesnittet $2x^2 + 4xy + 2y^2 + 3\sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0$ i xy-planet.

Oppgave 5

a) La A, B og C være $(n \times n)$-matriser (n et positivt heltall) der $AB = I = CA$. Vis at $B = C$. Hva sier dette om matrisen A?

b) Bevis eller motbevis følgende utsagn (med n menes alltid et positivt heltall):

(i) For invertible $(n \times n)$-matriser A og B gjelder det alltid at $AB = BA$.

(ii) La A og B være $(n \times n)$-matriser, der A er invertibel. Da gjelder

$$AB\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

(iii) En ortogonal $(n \times n)$-matrise A har determinant lik -1 eller 1.