Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Kristian Gjøsteen (73 55 02 42)

Eksamen i Lineær algebra og geometri (MA1201/MA6201)

Bokmål
Lørdag 18. august 2012
Tid: 09:00–13:00

Hjelpemidler: Ingen trykte/håndskrevne hjelpemidler er tillatt.
Bestemt enkel kalkulator er tillatt.

Sensur: 8. september 2012.

Settet består av 5 oppgaver med til sammen 9 delspørsmål. Alle svar skal begrunnes og alle delspørsmål vil bli vektlagt likt i vurderingen.

Oppgave 1

a) Finn den reduserte trappeformen av den reelle matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 & 6 \\ 2 & 0 & 4 & 7 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Løs likningssystemet

$$\begin{aligned} 2x_2 - 5x_3 &= 6 \\ 2x_1 \qquad + 4x_3 &= 7 \\ -1x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Oppgave 2 Skriv det komplekse tallet $1+\sqrt{3}i$ på polarform, og bruk dette til å finne alle komplekse tall z slik at

$$z^3 = 1+\sqrt{3}i.$$

Skisser løsningene i det komplekse planet.

Oppgave 3

a) Bestem egenverdiene λ_1 og λ_2 til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 36 & -12 \\ -12 & 29 \end{bmatrix}.$$

Vis at $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ blir egenvektorer som korresponderer med disse egenverdiene.

b) Bestem en ortogonal matrise P slik at $P^TAP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, der A er matrisen i a) og λ_1 og λ_2 er egenverdiene til A.

c) Skriv den kvadratiske formen

$$Q(x,y) = 36x^2 - 24xy + 29y^2$$

på følgende måte

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

dvs. bestem a, b og c.

d) Innfør et nytt koordinatsystem (x', y') slik at kjeglesnittet

$$36x^2 - 24xy + 29y^2 - 168x + 106y + 41 = 0$$

kommer på standardform, dvs. uten produktledd $x'y'$. Skisser kjeglesnittet i xy-planet og angi posisjonen til det nye koordinatsystemet (x', y'). Er dette en parabel, en ellipse eller en hyperbel?

Oppgave 4 La A være en 3×3-matrise over $\mathbb{R}$. Anta at det finnes en invertibel 3×3-matrise P slik

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

For hvilke vektorer $\mathbf{b}$ in $\mathbb{R}^3$ er likningssystemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

løsbart? For en gitt $\mathbf{b}$ som gjør at likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er løsbart, hvordan ser løsningene ut og hvor mange er det?

Oppgave 5 La A være en $n \times n$-matrise og I den $n \times n$-identitetsmatrisen, begge over de reelle tallene $\mathbb{R}$. Anta at $A^m = 0$ for et positivt heltall m. Vis at $I - A$ er en invertibel matrise.