Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Øyvind Solberg (73 59 17 48)

Eksamen i Lineær algebra og geometri (MA1201/MA6201)

Bokmål
Tirsdag 20. desember 2011
Tid: 09:00–13:00

Hjelpemidler: Ingen trykte/håndskrevne hjelpemidler er tillatt.
Bestemt enkel kalkulator er tillatt.

Sensur: 17. januar 2012.

Settet består av 5 oppgaver med til sammen 11 delspørsmål. Alle svar skal begrunnes og alle delspørsmål vil bli vektlagt likt i vurderingen.

Oppgave 1 Bestem kryssproduktet $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ når $\mathbf{u} = (3, 2, -1)$ og $\mathbf{v} = (-1, 3, 2)$. Finn arealet av trekanten bestemt av punktene $P = (2, 1, 1)$, $Q = (5, 3, 0)$ og $R = (1, 4, 3)$.

Oppgave 2

a) Hva er redusert trappeform av den reelle matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) La $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right]$, og la $B = \left[\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{smallmatrix}\right]$. Regn ut AB og BA. Bestem for hvilke reelle verdier av $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ som gir at $AB = BA$.

Oppgave 3

a) Skriv det komplekse tallet $\sqrt{3} - i$ på polarform, og bruk dette til å finne alle komplekse tall z slik at

$$z^3 = \sqrt{3} - i.$$

Skisser løsningene i det komplekse planet.

b) For to reelle tall z_1 og z_2, så vil alltid $z_1 + z_2$ og $z_1 z_2$ igjen være reelle tall. Hvilke par av komplekse tall (z_1, z_2) har egenskapen at $z_1 + z_2$ og $z_1 z_2$ er reelle tall?

Oppgave 4

a) Bestem egenverdiene λ_1 og λ_2 til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} \frac{50}{13^2} & \frac{120}{13^2} \\ \frac{120}{13^2} & \frac{288}{13^2} \end{bmatrix}.$$

Vis at $\mathbf{x}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 5 \\ 12 \end{smallmatrix}\right]$ og $\mathbf{x}_2 = \left[\begin{smallmatrix} -12 \\ 5 \end{smallmatrix}\right]$ blir egenvektorer som korresponderer med disse egenverdiene.

b) Bestem en ortogonal matrise P slik at $P^T AP = \left[\begin{smallmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{smallmatrix}\right]$, der A er matrisen i a) og λ_1 og λ_2 er egenverdiene til A.

c) Skriv den kvadratiske formen

$$Q(x, y) = \frac{50}{13^2}x^2 + \frac{240}{13^2}xy + \frac{288}{13^2}y^2$$

på følgende måte

$$\left[\begin{smallmatrix} x & y \end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]$$

dvs. bestem a, b og c.

d) Innfør et nytt koordinatsystem (x', y') slik at kjeglesnittet

$$\frac{50}{13^2}x^2 + \frac{240}{13^2}xy + \frac{288}{13^2}y^2 - 13y + 1 = 0$$

kommer på standardform, dvs. uten produktledd $x'y'$. Skisser kjeglesnittet i xy-planet og angi posisjonen til det nye koordinatsystemet (x', y'). Er dette en parabel, en ellipse eller en hyperbel?

Oppgave 5

a) La M være en reell 2×2-matrise med to forskjellige reelle egenverdier λ_1 og λ_2 og tilhørende egenvektorer $\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_2$. Vis at 2×2-matrisen P, der første kolonne er $\mathbf{x}_1$ og andre kolonne er $\mathbf{x}_2$, er en invertibel matrise, dvs. $\det(P) \neq 0$. En kan bruke uten bevis at $\det(P) \neq 0$ hvis og bare hvis $\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_2$ ikke er parallelle.

I resten av oppgaven kan en anta at a) er vist. La A og B være to reelle 2×2-matriser, og anta at $AB = BA$ og at A har to forskjellige reelle egenverdier λ_1 og λ_2.

b) La $\mathbf{x}_1$ være en egenvektor for A med tilhørende egenverdi λ_1. Vis at $\mathbf{x}_1$ også er en egenvektor for B.

Vis at matrisen B er diagonaliserbar.