NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

# Eksamensoppgave i **MA1201/MA6201 Lineær algebra**

**Faglig kontakt under eksamen:** Steffen Oppermann

**Tlf:** 91897712

**Eksamensdato:** 1. desember 2014

**Eksamenstid (fra–til):** 09:00–13:00

**Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler:** Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

**Annen informasjon:**

**Målform/språk:** bokmål

**Antall sider:** 3

**Antall sider vedlegg:** 0

**Kontrollert av:**

Dato Sign

**Oppgave 1**

**a)** Finn alle løsninger av systemet av lineære ligninger

$$\begin{aligned} x - 2y \phantom{{}-z} &= -3 \\ x + y - z &= 2 \\ 2x - y + z &= 1 \\ 2x + y + 2z &= 6 \end{aligned}$$

**b)** Betrakt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Er $A$ inverterbar? (Begrunn svaret ditt.)

**Oppgave 2** Betrakt de to vektorene $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^3$.

**a)** Vis at $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er ortogonale. Normaliser dem slik at du får et ortonormalt par av vektorer $\vec{u}_n$ og $\vec{v}_n$.

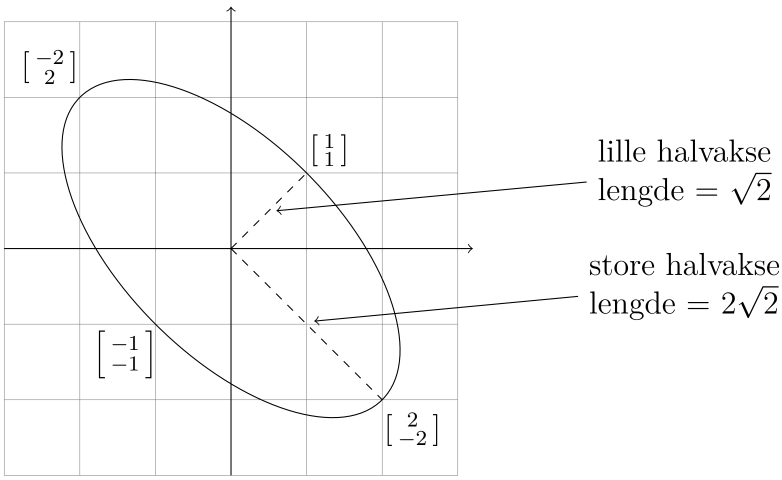
**b)** Finn en tredje vektor $\vec{w}$ slik at $(\vec{u}_n, \vec{v}_n, \vec{w})$ er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$.

(Hint: For $\mathbb{R}^3$ finnes en konstruksjon som "produserer" en vektor som er ortogonal til to gitte vektorer.)

**c)** Vis generelt: To ortogonale, ikke-null vektorer i $\mathbb{R}^n$ er lineært uavhengige.

(Husk: En samling vektorer kalles *ortogonal* hvis prikkproduktet av to vilkårlige distinkte vektorer fra samlingen er null. Den kalles *ortonormal* hvis, i tillegg, hver vektor har lengde 1.)

**Oppgave 3** Betrakt ellipsen




Finn ligningen som beskriver ellipsen.

(Hint: En strategi kan være å først finne ligningen i et koordinatsystem som er rotert med en viss vinkel.)

**Oppgave 4** La $A$ være en kvadratisk matrise slik at $A^2 + A + I = 0$.

**a)** Vis at $A$ ikke har noen reelle egenverdier.

**b)** Hvilke to komplekse tall kan være egenverdier for $A$? Skriv dem på polarform.

**c)** Finn en reell $2 \times 2$-matrise $A$ som tilfredsstiller ligningen over.

**Oppgave 5** La $A$ være en $m \times n$-matrise og $B$ en $n \times m$-matrise slik at $AB = I_m$. Avgjør om de følgende påstandene er sanne. Hvis de er sanne, gi et bevis. Hvis ikke, gi et moteksempel.

**a)** Hvis $C$ er en $n \times m$-matrise slik at $CA = I_n$, så er $C = B$.

**b)** Hvis $C$ er en $n \times m$-matrise slik at $AC = I_m$, så er $C = B$.

**Oppgave 6** La $A$ være en reell $2 \times 2$-matrise med (minst en) reell egenverdi.

Anta at det finnes en reell $2 \times 2$-matrise $B$ som ikke har noen reelle egenverdier, slik at $AB = BA$.

Vis at $A = \left[\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right]$ for en $a \in \mathbb{R}$.

(Hint: Hva kan man si om komplekse egenverdier og egenvektorer av $B$? Kan man si noe om produktet av $A$ med disse komplekse vektorene?)