

$$1) a) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} & \frac{11}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

høyre side en løsning: $z = 1$,
 $y = 2$, $x = 1$

1) b) Matrissa er ikke kvadratisk,
og dermed ikke inverterbar.

$$2) a) \vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) = 0$$

altså er $\vec{u}$ og $\vec{v}$ ortogonale.

$$\vec{u}_n = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_n = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

b) Vi kan velge

$$\vec{w} = \vec{u}_n \times \vec{v}_n = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} \end{bmatrix}$$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, men $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$

$$\text{Anta } s\vec{u} + t\vec{v} = \vec{0}$$

$$\leadsto \vec{u} \cdot (s\vec{u} + t\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{0} = 0$$

$$\begin{matrix} \parallel \\ s \parallel \vec{u} \parallel^2 + t \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{v}}_{=0} \\ \neq 0 \end{matrix}$$

$$\leadsto s = 0$$

$$\vec{v} \cdot (s\vec{u} + t\vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{0} = 0$$

$$\begin{matrix} \parallel \\ t \parallel \vec{v} \parallel^2 \end{matrix}$$

$$\leadsto t = 0$$

Altså er $\vec{u}$ og $\vec{v}$ lineært uafhængige.

3) Tenker oss først koordinatsystem med basis gitt som

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (\text{vektor langs den store halvaksen})$$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (\text{vektor langs den lille halvaksen})$$

Med hensyn til disse "nye" koordinater har ellipsen ligning

$$\frac{(x')^2}{(2\sqrt{2})^2} + \frac{(y')^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$$

$$\text{altså } (x')^2 + 4(y')^2 = 8$$

$$\text{eller } \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 8$$

$$\text{Nå vet vi at } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = P^T A P$$

der A = matrisa som beskriver ellipsen i x - y -koordinater

$$P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{bmatrix} \quad \text{basisbytte-matrix}$$

altså

$$A = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} P^T$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{4}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{4}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{4}{2} & \frac{1}{2} + \frac{4}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Ligningen til ellipsen er altså

$$\frac{5}{2}x^2 + 3xy + \frac{5}{2}y^2 = 8$$

eller

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 = 16$$

4) a) Anta λ er en egenverdi av A , $\vec{v}$ den tilhørende egenvektor.

$$\underbrace{(A^2 + A + I)}_{=0} \vec{v} = (\lambda^2 + \lambda + 1) \vec{v}$$

men for reelle tall λ kan

$$\lambda^2 + \lambda + 1 \text{ ikke være } 0$$

$\rightarrow$ ingen reelle egenverdier.

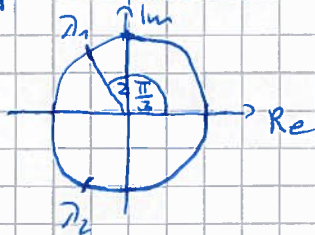
b) Som i a) ser vi at hver egenverdi må oppfylle

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

polar form:



$$\lambda_1 = 1 \cdot e^{i \frac{2\pi}{3}}$$

$$\lambda_2 = 1 \cdot e^{-i \frac{2\pi}{3}}$$

c) Fra b) kan vi gjelde

$$A = \begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi}{3} & -\sin \frac{2\pi}{3} \\ \sin \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{2\pi}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{da er } A^2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{og } A^2 + A = -I$$

(Det går også an bruke teori:

vi vet at A ovenfor er similær

til $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ som komplekse

matriser.

Men $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ oppfylles ligningen,

og derfor gjør A det også.)

5) a) Sant:

$$C = C \cdot I_n = CAB = I_n B = B$$

b) Feil:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

men $B \neq C$.

6) Siden B ikke har noen reelle egenverdier:
 B har to komplekse egenverdier
 λ og $\overline{\lambda}$, med egenvektorene $\vec{v}$
og $\overline{\vec{v}}$ i $\mathbb{C}^2$.

Spesielt er egenrommet til λ
1-dimensjonalt.

Vi ser at

$$\begin{aligned} B(A\vec{v}) &= AB\vec{v} && \text{siden } BA=AB \\ &= A\lambda\vec{v} \\ &= \lambda(A\vec{v}) \end{aligned}$$

altså er $A\vec{v}$ en egenvektor til B ,
med egenverdi λ .

Det følger at $A\vec{v} \in E_{\lambda}(B) = \text{Span}\{\vec{v}\}$,
altså $A\vec{v} = a\vec{v}$ for noen $a \in \mathbb{C}$.

Siden A har en reell egenverdi
kan A ikke ha noen komplekse, ikke reelle
egenverdier. Derfor er $a \in \mathbb{R}$.

Vi har også $A \vec{v} = \overline{A \vec{v}} = \overline{a \vec{v}} = a \vec{v}$,
så $\vec{v}, \overline{\vec{v}} \in E_a(A)$

Men $\vec{v}$ og $\overline{\vec{v}}$ er lineært uafhængige,
så $\dim E_a(A) \geq 2$, og
dermed $E_a(A) = \mathbb{C}^2$

Det betyder at også $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og
 $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ er egenvektorer med
egenverdi a ,

Derfor er $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$.