29/1-08

Løsningsforslag: Øving 1, ekstra

5.1.26 $P_1 = \{a+bx \; ; \; a,b \in \mathbb{R}\}$ = polynom av grad ≤ 1 er eit vektorrom (av dimensjon 2), m.h.p. vanleg addisjon av funksjonar.

Men $P_1' = \{a+bx \; ; \; b \neq 0\} \subset P_1$ er mengda av polynom av grad nøyaktig lik 1, og for eksempel er

$$\underbrace{(1+2x)}_{\in P_1'} - \underbrace{2x}_{\in P_1'} = 1 \notin P_1'$$

Difor er ikkje P_1' eit vektorrom. P_1' inneheld heller ikkje $\mathbf{0}$ (dvs. $a=b=0$), så av den grunn kan heller ikkje P_1' bli eit vektorrom m.h.p. vanleg addisjon (som ovanfor).

5.2.15 Finn likninga for planet i $\mathbb{R}^3$ utspent av $\mathbf{u}=(-1,1,1)$ og $(3,4,4)=\mathbf{v}$.

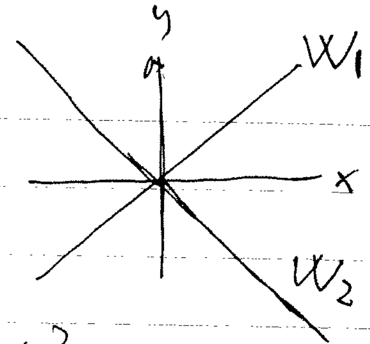
Ta for eks. kryss-produktet og finn ein normalvektor til planet, altså

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 7\mathbf{j} - 7\mathbf{k} = (0,7,-7)$$

Velg no $\mathbf{n} = (0,1,-1) = \frac{1}{7}\mathbf{u}\times\mathbf{v}$. Likninga for planet er

$$\mathbf{n}\cdot(x,y,z) = 0 \quad , \quad \text{dvs.} \quad \boxed{y - z = 0}$$

[Merk! Som kontroll, legg merke til at $y=z$ er oppfylt for både $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$]



5.2.25 $W_1: y = x$ (line)
$W_2: y = -x$ (line)

W_1 og W_2 er underrom av $\mathbb{R}^2$, men unionen $W_1 \cup W_2$ er ikkje eit underrom. For eksempel, $W_1 \cup W_2$ er ikkje lukka under addisjon:

La $w_1 = (1,1)$, $w_2 = (1,-1)$

Då er $w_i \in W_1 \cup W_2$ for $i = 1,2$, men

$w_1 + w_2 = (2,0) \notin W_1 \cup W_2$
ligg på x-aksen.

5.3.9 $v_1 = (\lambda, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $v_2 = (-\frac{1}{2}, \lambda, -\frac{1}{2})$, $v_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \lambda)$

Skriv opp likn.-systemet $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0$, dvs.

$$\left.\begin{aligned} \lambda x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 &= 0 \\ -\tfrac{1}{2}x_1 + \lambda x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 &= 0 \\ -\tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 + \lambda x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

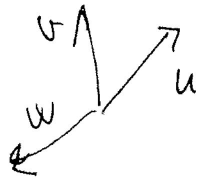
Lineært uavh. betyr at vi har berre den trivielle løysing $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, dvs. determ. til matrisa er $\neq 0$. Vi har

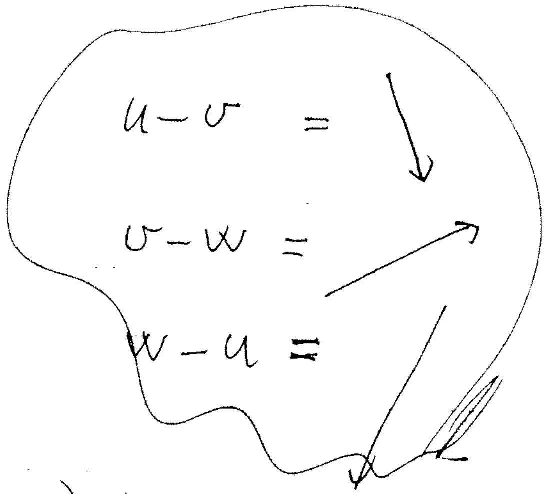
flaks!

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \lambda \end{pmatrix}, \quad \det(A) = \lambda^3 - \tfrac{3}{4}\lambda - \tfrac{1}{4} = (\lambda + \tfrac{1}{2})^2(\lambda - 1) = 0$$

$$\underline{\lambda = -1/2 \text{ og } \lambda = 1}$$

5.3.16



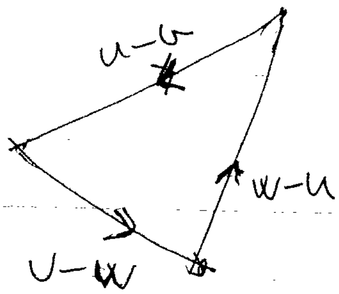


?

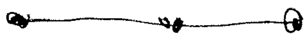
Vi har

$$(u-v)+(v-w)+w-u = 0 \;!$$

som viser at $\{(u-v), (v-w), (w-u)\}$ er lin. avhengig, Merk at vektorane dannar sidekantane i ein trekant, fordi summen er lik 0 !



[I det trivielle tilfelle der u, v, w ligg langs same line blir sjølvsagt trekanten "flat".]



<u>Merk</u> Du har no "oppdaga" følgande generelle, men enkle

<u>**Sats**</u> Hvis u, v, w er 3 vilkårlege vektorar i eit vektorrom, så er

$$\dim \operatorname{Span}\{(u-v), (v-w), (w-u)\} \leq 2$$