5/2-08 Løsningsforslag: Øving 2, ekstra

5.3.15 $\{v_1, v_2\}$ lin. uavh., $v_3 \notin \text{Span}\{v_1, v_2\}$.
Vil vise at $\{v_1, v_2, v_3\}$ er lin. uavhengig:
Anta

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = 0 \qquad (*)$$

Hvis $k_3 \neq 0$, så $v_3 = -\frac{1}{k_3}(k_1 v_1 + k_2 v_2) \in \text{Span}\{v_1, v_2\}$

som er umulig iflg. antakelsen. Difor er $k_3 = 0$, og vi har

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 = 0$$

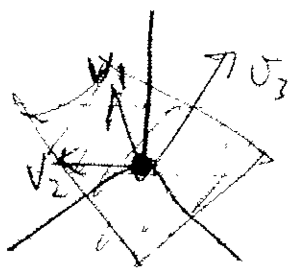
Men v_1 og v_2 er lin. uavhengige, så difor $k_1 = k_2 = 0$. Altså har vi vist at

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0 \qquad i\ (*)$$

er einaste mulighet (og følgeleg er v_1, v_2, v_3 lin. uavhengige).

5.3.27 Anta $\{v_1, v_2, v_3\}$ er ortogonal mengde i $\mathbb{R}^3$, dvs. $v_i \cdot v_j = 0$, for alle $i \neq j$, $v_i \neq 0$

(a)



La $W = \text{Span}\{v_1, v_2\}$, planet utspent av v_1 og v_2. v_1 er ikkje eit multiplum av v_2 fordi $v_1 \cdot v_2 = 0$. Så W er eit plan (2-dim underrom) i $\mathbb{R}^3$.

Sidan v_3 står vinkelrett på v_1 og v_2, er den vinkelrett på W. Spesielt er det klart at $v_3 \notin W$.

I følge Oppg. 5.3.15 er det da klart at

$$\{v_1, v_2, v_3\}$$

er lin. uavhengig (og utgjer ein basis for $\mathbb{R}^3$)

(b) Reint algebraisk, la oss vise at v_1, v_2, v_3 er lin. uavhengige, hvis alle er $\neq 0$ og står vinkelrett på kvarandre.

Anta

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = 0 \qquad (*)$$

Ta indre produktet med v_1 på begge sider av likning $(*)$ og få

$$k_1 \|v_1\|^2 + k_2 \underbrace{(v_1 \cdot v_2)}_{=0} + k_3 \underbrace{(v_1 \cdot v_3)}_{=0} = 0$$

dvs $k_1 \|v_1\|^2 = 0$. Men $\|v_1\| \neq 0$, så difor $k_1 = 0$.

Tilsvarande viser wi at $k_2 = 0$ og $k_3 = 0$. Totalt har vi da vist at

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

er einaste moglighet i $(*)$.

5.4.27 Basis for P_2 (polynom $p(x)$ av grad ≤ 2)

$\underline{\dim P_2 = 3}$

(a) $-1+x-2x^2$, $3+3x+6x^2$, 9

Det er lett å vise at

$$k_1(-1+x-2x^2)+k_2(3+3x+6x^2)+k_3 \cdot 9 = 0$$

medfører at $k_1 = k_2 = k_3$. Vi får nemleg

$$\begin{array}{lll} 1 & : & -k_1+3k_2+9k_3 = 0 \\ x & : & k_1+3k_2 = 0 \\ x^2 & : & -2k_1+6k_2 = 0 \end{array} \Bigg\} \Rightarrow k_1 = k_2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$k_3 = 0$$

Dermed er dei 3 oppgitte polynoma lin. uavhengige. Sidan også $\dim P_2 = 3$, så utgjer dei ein basis for heile P_2.

(b) $1+x$, x^2, $-2+2x^2$, $-3x$.

Påstår at alle utval av 3 ~~[illegible]~~ av polynoma gir ein basis for heile P_2! Men, velg for eks.

$$1+x,\ x^2,\ -2+2x^2$$

Vi viser at

$$k_1(1+x)+k_2x^2+k_3(-2+2x^2) = 0$$

medfører $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Gjer dette, liksom i (a),

(c) $\underbrace{1+x-3x^2}_{v_1}, \quad \underbrace{2+2x-6x^2}_{v_2}, \quad \underbrace{3+3x-9x^2}_{v_3}$

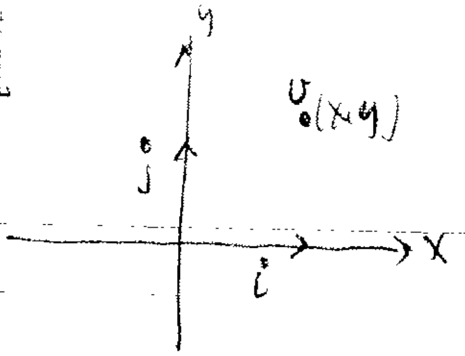
Her er $v_2 = 2v_1, \quad v_3 = 3v_1$

Difor er

$$\text{Span}\{v_1, v_2, v_3\} = \text{Span}\{v_1\}$$

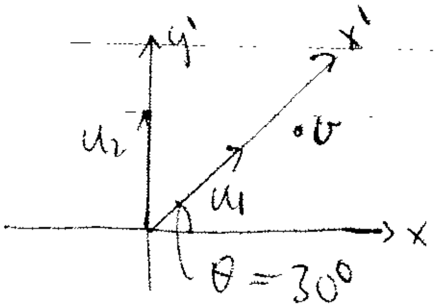
eit 1-dimensjonalt underrom av P_2, og ~~ein~~ ein basis er v_1 (eller $k \cdot v_1,\ k \neq 0$).

5.4.28



$v = xi + yj \longleftrightarrow (x,y)$

(standard) rektangulære koordinat system



$$\begin{cases} u_2 = j \\ u_1 = \dfrac{\sqrt{3}\,i + j}{2} \end{cases}$$

$$v = \underset{\displaystyle (x,y)}{\underset{\updownarrow}{xi + yj}} = \underset{\displaystyle (x',y')}{\underset{\updownarrow}{x'u_1 + y'u_2}}$$

Vi vil bestemme (x',y') når (x,y) er gitt!

Den generelle samanheng er at

$$xi + yj = x'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{j}{2}\right) + y'j$$

$$= \left(x'\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i + \left(\frac{x'}{2} + y'\right)j$$

Det gir $\left.\begin{array}{l} x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' \\ y = \left(\frac{x'}{2} + y'\right) \end{array}\right\}$ eller $\left\{\begin{array}{l} x' = \frac{2}{\sqrt{3}}x \\ y' = y - \frac{1}{\sqrt{3}}x \end{array}\right.$

(a) $(x, y) = (\sqrt{3}, 1) \Rightarrow (x', y') = (2, 0)$

(b) $(x, y) = (1, 0) \Rightarrow (x', y') = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(c) $(x, y) = (0, 1) \Rightarrow (x', y') = (0, 1) = (x, y)$

(d) $(x, y) = (a, b) \Rightarrow (x', y') = \left(\frac{2a}{\sqrt{3}}, b - \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$

5.4.30 Eit underrom W av eit endeleg dim. vektorrom V er også endeleg dimensjonalt.

Merk! Beviset for påstanden er avhengig av kva vi skal ta som utgangspunkt.
Sjå på beviset for Teorem 5.4.7, der ein viser at $\dim W \leq \dim V$

men under føresetnad av at ein veit at $\dim W < \infty$.

La oss bruke Teorem 5,4.4. Vi kan anta $W \neq 0$ (0-rommet er 0-dimensjonalt). Start med å velge $w_1 \neq 0$ i W, og set.

$$W_1 = \text{Span}\{w_1\} \subset W$$

(1-dim rom)

Hvis $W_1 \subsetneq W$, så kan vi velje $w_2 \in W$, $w_1 \notin W_1$ slik at $\{w_1, w_2\}$ er lin. navhengig, og vi far

$$W_2 = \text{Span}\{w_1, w_2\} \quad (2\text{-dimensjonalt})$$

$$W_1 \subsetneq W_2 \subset W \subset V$$

Hvis $W_2 \subsetneq W$, så kan vi velje $w_3 \in W$ ($w_3 \notin W_2$) slik at $\{w_1, w_2, w_3\}$ lin. navhengig. og ved å sette $W_3 = \text{Span}\{w_1, w_2, w_3\}$ har vi

$$W_1 \subsetneq W_2 \subsetneq W_3 \subset W \subset V$$

Denne prosessen kan vi gå vidare med,

$$W_k \subsetneq W_{k+1} \subset W$$

så lenge $W_{k+1} \neq W$, men ~~og~~ den stoppar opp ~~…~~ hvis vi får $W_{k+1} = W$.

I siste tilfelle er $\{w_1, \dots, w_{k+1}\}$ ein basis for W

sidan $\{w_1, \dots w_{k+1}\}$ utspenner W, og er også lin. uavhengige.

Men kvis prosessen ikkje stoppar, så kan vi finne ei mengde

$$\{w_1, w_2, \dots w_k, w_{k+1}\}$$

av lin. uavhengige vektorar i W, der k er så stor som vi vil. Men dette er også ei mengde av $k+1$ lin. uavh. vektorar av V, og sidan k kan veljast så stor vi vil, vil dette medføre at

$$\dim V = \infty .$$

Denne sjølmotseiinga viser at det må finnast ein maksimal k slik at

$$W_1 \subsetneq W_2 \subsetneq \dots \subsetneq W_k \subsetneq \underset{\substack{\| \\ \mathrm{Span}\{w_1, w_2, \dots w_{k+1}\}}}{W_{k+1}} = W < V$$

[Vi ser då at $\dim W = k+1$]

 Try yourself!