19/2-08

Løsningsforslag: Øving 3, ekstra

5.5.11a Have 3 vectors in $\mathbb{R}^4$: $(1,1,-4,-3) = v_1$
$(2,0,2,-2) = v_2$
$(2,-1,3,2) = v_3$

$W = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^4$

Det er klart at $2 \leq \dim W \leq 3$, sidan $\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_3\}$ og $\{v_2, v_3\}$ alle er lin. uavhengige.

La oss sjekke om $v_3 \in \text{span}\{v_1, v_2\}$, og sjå på linn. systemet

$$a v_1 + b v_2 = v_3$$

dvs.

$$a\begin{bmatrix}1\\1\\-4\\-3\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}2\\0\\2\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-1\\3\\2\end{bmatrix}$$

dvs.

$$\left.\begin{array}{l} a+2b = 2 \\ a+0 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow b = 3/2 \Rightarrow a = -1$$
$$-4a+2b = 3$$
$$-3a-2b = 2 \quad ?$$

Vi finn at der er inga løysing for a, b (så systemet er inkonsistent), og difor er $v_3 \notin \text{span}\{v_1, v_2\}$, så $\dim W = 3$

5.5.12c

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = (1,-1,5,2) \\ v_2 = (-2,3,1,0) \\ v_3 = (4,-5,9,4) \\ v_4 = (0,4,2,-3) \\ v_5 = (-7,18,2,-8) \end{array}\right\} \quad \text{skriv } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 & -7 \\ -1 & 3 & -5 & 4 & 18 \\ 5 & 1 & 9 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & -3 & -8 \end{bmatrix}$$

Problemet er å plukke ut kolonner i A som dannar ein basis for kolonnerommet

$$\text{kol}(A) = \text{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

Redusert rad-trappeform for A er

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{rang} = 3$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

Har ledande 1-tal i kolonne nr. 1, 2, 4, og kolonnerommet kol(R) har difor kolonnene nr 1, 2, 4 som basis.

Nå er kol(A) $\neq$ kol(R) generelt, men likevel kan vi slutte at dei same kolonne-nummer gir ein basis for kol(A), altså

$$\text{kol}(A) = \text{span}\{v_1, v_2, v_4\}$$

Til slutt skal ein uttrykke dei to andre, v_3 og v_5, som ein lin. komb. ~~av~~ basisen $\{v_1, v_2, v_4\}$.

(i) Skriv $v_3 = av_1 + bv_2 + cv_4$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

eller

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{finn } a, b, c!$$

(ii) Skriv $v_5 = dv_1 + ev_2 + fv_4$

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 18 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} v_1 \\ \downarrow \\ \\ \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} v_2 \\ \downarrow \\ \\ \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} v_3 \\ \downarrow \\ \\ \end{pmatrix}$$

finn a, b, c!

La oss vere litt "smarte" og utføre kalkulasjonane på følgande måte:

$$(*) \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -5 & 18 \\ 9 & 2 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$$

Vi veit at vi har ei eintydig løysing for matrisa

$$X = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

Skriv $(*)$ som

$$(**) \qquad AX = B = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -5 & 18 \\ 9 & 2 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$$

Vi kan ikkje løyse dette systemet med at $X = A^{-1}B$ sidan A er ei 4×3-matrise og difor ikkje invertibel.

Men kolonnene til A er lin. uavhengige, og ifølge resultata frå Kap. 6.4, som vi skal tillate oss å benytte, er $A^T A$ invertibel, og enkel utrekning gir

$$A^T A = \begin{pmatrix} 31 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 14 \\ 0 & 14 & 29 \end{pmatrix}, \text{ der } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Multipliser no (**) med A^T på venstre side av likn. (**), og få

$$(A^T A) X = A^T B \quad , \quad X = (A^T A)^{-1} A^T B$$

altså

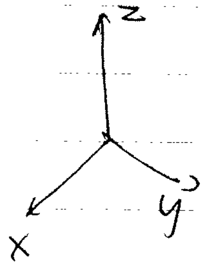
$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{31} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{29}{210} & -\frac{1}{15} \\ 0 & -\frac{1}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -5 & 18 \\ 9 & 2 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Konklusjon $\quad v_3 = 2v_1 - v_2$

$v_5 = -v_1 + 3v_2 + 2v_4$

5.5.14 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$



$$\text{Null}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} ; z \in \mathbb{R} \right\}$$

$= z$-aksen

$$\text{Kol}(A) = \left\{ a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} ; a,b \in \mathbb{R} \right\} = xy\text{-planet}$$

5.6.5 (a) $A = 4 \times 4$, maks rank$(A) = 4$

Kan ha $\text{Null}(A) = \{0\}$, nemleg når rank$(A) = 4$

(b) $A = 3 \times 5 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$

$5 = \dim \text{Null}(A) + \text{rank}(A)$

rank$(A) \leq 3$, difor $\dim \text{Null}(A) \geq 2$

(c) $A = 5 \times 3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$

$3 = \dim \text{Null}(A) + \text{rank}(A)$

Kan ha rank$(A) = 3$, og då er $\dim \text{Null}(A) = 0$

5-66 A = $m \times n$-matrise : $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Største verdi for rang(A) er $\min\{m,n\}$, ~~og~~ Dimensjonsformelen gir

$$n = \dim \mathrm{Null}(A) + \mathrm{rang}(A)$$

derfor

$$\dim \mathrm{Null}(A) = n - \mathrm{rang}(A)$$
$$\geq n - \min\{m,n\}$$

Derfor (i) hvis $n \leq m$, så er

$$\dim \mathrm{Null}(A) \geq n - n = 0$$

og vi kan ha $\dim \mathrm{Null}(A) = 0$ (når $\mathrm{rang} A = n$

(ii) hvis $n > m$, så er

$$\dim \mathrm{Null}(A) = n - \mathrm{rang}(A)$$
$$\geq n - m$$

og minimum for $\dim \mathrm{Null}(A)$ er $n-m$, som vi oppnår når $\mathrm{rang}(A) = m$.

5.6.10 $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$, la $v_1 = \begin{bmatrix} a \\ d \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} b \\ e \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix}$

$\text{rang}(A) = 2 \iff \dim \text{span}\{v_1, v_2, v_3\} = 2$

$\iff$ kan plukke ut to av vektorane som er lineært uavhengige

$$\left.\begin{array}{l} \{v_1, v_2\} \text{ lin. uavh} \iff \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \neq 0 \\ \{v_1, v_3\} \text{ — " — } \iff \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \neq 0 \\ \{v_2, v_3\} \text{ — " — } \iff \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \neq 0 \end{array}\right\}$$

enig?

ja — nei