26/2-08

Løysingsforslag Øving 4, ekstra

5.5.13 $A = \begin{pmatrix} r_1 \to \\ r_2 \to \\ \vdots \\ r_n \to \end{pmatrix}$ $n \times n$-matrise med radvektorar $r_1, r_2, \ldots, r_n$

Vi antar A invertibel. Skal vise at $\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ er ein basis for $\mathbb{R}^n$.

La $W = \mathrm{Rad}(A) = \mathrm{span}\{r_1, \ldots, r_n\}$ = radrommet til A

Dimensjonssetninga gir at

$$\dim \mathrm{Null}(A) + \dim W = n$$

Men her er

$$\mathrm{Null}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n ; Ax = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{0}\}$$

fordi A er invertibel. Difor er $\dim W = n$. På den andre side er også W utspent av dei n vektorane, slik at desse må vere lineært uavhengige, og er følgeleg ein basis.

5.5.15 A = 3×3-matrise. Vil finne ei matrise som har nullrom av dimensjon 0, 1, 2:

(a) $\mathrm{Null}(A) = \{\text{punkt}\}$, dvs $= \{0\}$.

Då må $\mathrm{rang}(A) = 3$, fordi

$$\underset{0}{\underset{\parallel}{\dim \mathrm{Null}(A)}} + \mathrm{rang}(A) = 3$$

Men rang $= 3$ betyr A invertibel. Velg f.eks $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

(b) Null(A) = line (dvs. 1-dim underrom av $\mathbb{R}^3$)

$$\underbrace{\dim \mathrm{Null}(A)}_{1} + \underbrace{\mathrm{rang}(A)}_{2} = 3$$

$\Rightarrow$ rang(A) = 2. Velg $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

eller f.eks. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ osv. . .

(c) Null(A) = plan (dvs. 2-dim underrom av $\mathbb{R}^3$)

$2 + x = 3$ (som ovanfor)

gir no $x = 1 = \mathrm{rang}(A)$

Velg $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (enklaste eksempel?)

<u>5. Suppl. ex. 12</u> (a) basis for alle 3x3-symm. matriser.

Forslag: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Så vektorrommet er 6-dimensjonalt.
Vis at vi faktisk har ein basis ovanfor!

(b) skeiv-symm. 3×3-matriser;

$A^T = -A$, så $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$

Vi ser at $A = a\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

og at $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

er ein basis for skeiv-symm. matriser, som utgjer eit 3-dimensjonalt vektorrom.

<u>5. Suppl. ex. 13</u>

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ — plukk ut $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ som har determinant $\neq 0$

så $\text{rang}(A) = 2$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, $\text{rang}(A) \geq 1$, men kan ikkje finne 2×2-submatrise med determinant $\neq 0$, så $\text{rang}(A) = 1$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ Kan ikkje ha $\text{rang}(A) = 3$ fordi $\det(A) = 0$,

Faktisk er $c_3 = c_1 - c_2$ (c_i = kolonnevektor nr. i)

Så rang(A) ≤ 2. Men i høgre hjørne oppe finn vi submatrisa $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

som har determ. $\neq 0$. Altså rang(A) $= 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{rang}(A) \leq 3$$

Men $\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \neq 0$, så rang(A) $= 3$

<u>11.6.6</u> $P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$, $P^2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$

alle tala i P^2 er > 0, så P er regulær!

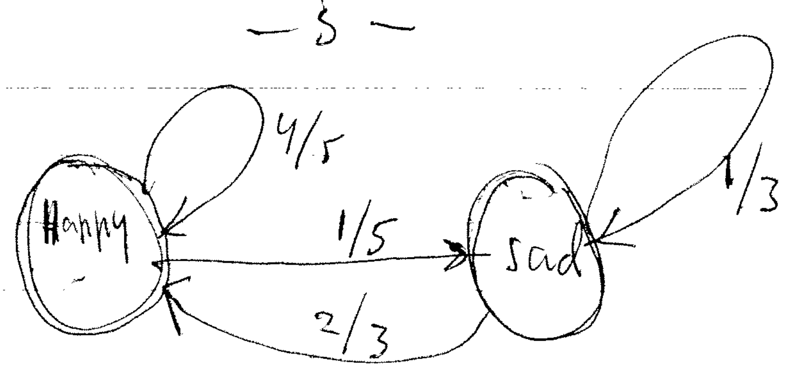
Stabil tilstandsvektor $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $x+y+z = 1$

er eigenvektor til ~~mat~~ P med $\lambda = 1$, dvs. $P \cdot v = v$. Vi finn

$$v = \begin{pmatrix} 0.57735 \\ 0.57735 \\ 0.57735 \end{pmatrix}$$ modulo konstant multippel.

Vi har $x = y = z$ faktisk (fordi P er dobbelt stokastisk). Sum $= 1$ gir $x = y = z = 1/3$, $v = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

11.6.7



$$P = \begin{bmatrix} 4/5 & 1/3 \\ 1/5 & 2/3 \end{bmatrix}$$ enig?

Stabil tilstandsvektor $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $Pv = v$

og vi vil også ha $x+y=1$. Vi får

$v = k\begin{bmatrix} 5/3 \\ 1 \end{bmatrix}$, velg $k = \frac{1}{5/3+1} = \frac{3}{8}$

, som gir

$$v = \begin{pmatrix} 5/8 \\ 3/8 \end{pmatrix}$$ happy, sad

Ettersom humøret til John "stabiliserer" seg vil vi kunne hevde at John er (jamtover) happy med sannsynlighet 5/8 på ein gitt dag!

5/8 3/8