13/5-08

Løsningsforslag Øving 11, ekstra

① Spesialoppgåve Vis at $R(A^T) = R(A^TA)$, der $R(A)$ er kolonnerommet til A.

La A vere $m\times n$-matrise, og tenk på A som (standard) matrisa til lineæravbildninga

$$T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad T_A(x) = A\cdot x$$

der $x \in \mathbb{R}^n$ er kolonne-vektor. Då er $R(A^T)$ lik bildet til T_A, dvs. $R(A^T) = \mathrm{Im}(T_A)$.

Vi har $T_{A^TA} = T_{A^T}\cdot T_A$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "T_A"'] \arrow[rr, bend right, "T_{A^TA}"'] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "T_{A^T}"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Vi skal vise at T_{A^T} og $T_{A^T}\circ T_A$ har same bilde (som underrom i $\mathbb{R}^n$).

Merk at radrommet til A^T er lik kolonnerommet til A (som underrom i $\mathbb{R}^m$). Vidare er dette rommet lik det ortogonale komplement til $\mathrm{Null}(A^T)$, ifølge eit kjent resultat om matriser $B(=A^T)$ generelt. Dette må du repetere, om nødvendig!

Vi bruker observasjonen (*) til å dekomponere ein vilkårleg vektor $z \in \mathbb{R}^m$:

$$z = z_1 + z_2 \quad , \quad \begin{array}{l} z_1 \in Null(A^T) \\ z_2 \in R(A) \end{array}$$

No er det lett å vise påstanden i oppgåva, som seier at T_{A^T} og $T_{A^T} \cdot T_A$ har same bilde (i $\mathbb{R}^n$).

Det er klart at $Im(T_{A^T} \circ T_A) \subseteq Im(T_{A^T})$. Problemet er å vise den motsette inklusjon:

La $y \in Im(T_{A^T})$, dvs. det finst $z \in \mathbb{R}^n$ slik at $A^T z = y$. Dekomponer z som ovanfor, $z = z_1 + z_2$. Velg $x \in \mathbb{R}^m$ slik at $Ax = z_2$. Det gir

$$\begin{aligned} y = A^T z = A^T(z_1 + z_2) &= A^T z_1 + A^T z_2 \\ = A^T z_2 &= (A^T A)x \end{aligned}$$

$$\left[\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "T_A"] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "T_{A^T}"] & \mathbb{R}^n \\
x \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] \arrow[r] & z_2 \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] \arrow[r, Rightarrow] & y \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] \\
 & z \arrow[ur] & \\
 & z_1 \arrow[r, Rightarrow] & 0
\end{tikzcd}\right] \quad \text{illustrasjon}$$

Så vi ser at y er også i bildet til $T_{A^T} \circ T_A$.

(2) 11.17.2

Vi får sannsynlighetstabellen

		Aa-AA	Aa-Aa	Aa-aa
a_n	AA	1/2	1/4	0
b_n	Aa	1/2	1/2	1/2
c_n	aa	0	1/4	1/2

↓ fast

Aa − xy

↑ 3 mulig

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} \quad , \quad \text{der } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Her er $a_0 + b_0 + c_0 = 1$ (og difor også $a_n + b_n + c_n = 1$)
Eit induksjonsbevis gir

$$M^n = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{n+1}} , & \frac{1}{4} , & \frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+1}} \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{n+1}} \end{bmatrix}$$

La $n \to \infty$. $M^n \longrightarrow \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

Vi kan også finne M^n med diagonalisering

$$M = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$M^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \text{som ovanfor}$$

11.17.3

To matriser er nødvendig, la

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

fra oppg. 11.17.2   eksempel 1 i boka!

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = M_1 \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = M_2 \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = M_2 M_1 \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

La
$$M = M_2 M_1 = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det gir

$$\begin{pmatrix} a_{2k} \\ b_{2k} \\ c_{2k} \end{pmatrix} = M^k \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{2k+1} \\ b_{2k+1} \\ c_{2k+1} \end{pmatrix} = M_1 M^k \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

I dette tilfelle er

$$M = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^k = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4^{-k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \text{osv} \ldots$$

(3) <u>Kap. 10 (side 563), nr. 6</u>

$$z = a+ib \overset{\phi}{\longleftrightarrow} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

(ϕ er bijeksjon)

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = Z, \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}$$

a)

b)

c)

$$\det(Z) = a^2+b^2 = |z|^2 = z\bar{z}$$

$$Z^{-1} = \frac{1}{\det(Z)}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{|z|^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$z \neq 0$: $$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{|z|^2} - i\frac{b}{|z|^2} \overset{\phi}{\longleftrightarrow} Z^{-1} \quad \text{Ok.}$$

d) Skriv $Z = \phi(z)$, sjå avanfor.

~~Vi har i c) at~~ $\cancel{\phi(z^{-1}) = \phi(z)^{-1}}$ ~~(for $z \neq 0$)~~

Vi ser på $\phi(z_1 z_2)$; la $z_1 = a_1+ib_1$, $z_2 = a_2+ib_2$

Den direkte måte å vise at

$$\phi(z_1 z_2) = \phi(z_1)\phi(z_2) \quad (= Z_1 Z_2)$$

er ved direkte kalkulasjon av $z_1 z_2$ og $Z_1 Z_2$

<u>Meir interessant</u> er det at

$$Z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = PDP^{-1}$$

dvs. eigenvektorane er <u>uavhengig</u> av a og b.
(sjekk dette!)

Dermed er

$$Z_1 = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$Z_1 Z_2 = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_2 & 0 \\ 0 & \bar{z}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 z_2 & 0 \\ 0 & \bar{z}_1 \bar{z}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

dvs $z_1 z_2 \xrightarrow{\phi} Z_1 Z_2$

<u>Kap. 10 (side 564), nr 10.</u> Anta $A^* = -A$
(skeiv-~~symm~~ Hermittisk)

a) $(iA)^* = \overline{(iA)}^T = ((-i)\bar{A})^T = -i(\bar{A})^T = -iA^*$
$= (-i)(-A) = iA$

som viser at iA er Hermitisk.

b) $A^* = -A \Rightarrow A^* A = A A^*$, så A er <u>normal</u>
og derfor unitært diagonaliserbar:

$$A = PDP^{-1}, \quad P \text{ unitær}$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Det vanlege Hermitiske indreproduktet på $\mathbb{C}^n$ er "prikk"-produktet

$$u \circ v = \langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i \bar{v}_i$$

$$= u^T \bar{v} = (u_1 \cdots u_n) \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{pmatrix}$$

~~[illegible]~~ Generelt har vi at

$$\langle Bu, v \rangle = \langle u, B^* v \rangle \quad \text{(sjekk det!)}$$

La λ vere ein eigenverdi for A, dvs. $Av = \lambda v$ der $v \neq 0$ er ~~den~~ ein tilhøyrande eigenvektor.

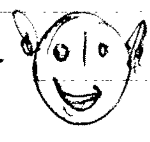
Det gir

$$\langle Av, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda \|v\|^2$$

$$\langle v, A^* v \rangle = \langle v, -Av \rangle = -\langle v, \lambda v \rangle$$

$$= -\bar{\lambda} \|v\|^2 .$$ Dette gir $\underline{\bar{\lambda} = -\lambda}$

Som er ekvivalent med at λ er reint imaginær ($\lambda = ix$, $x \in \mathbb{R}$)



that's it!