Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Førsteamanuensis Inger Heidi Slungård
Telefon: 735 91880

MNFMA108, Lineær algebra
Bokmål
Mandag 27. november 2000
Kl. 9-15
Hjelpemidler: Utdelt kalkulator
Sensur: 18. desember 2000

Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1

La $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

a) Finn rang og nullitet til matrisa A. Finn basiser for de tre vektorrommene, nullrommet til A, radrommet til A og kolonnerommet til A.

b) La A være ei vilkårlig inverterbar $n \times n$-matrise og la B være ei vilkårlig $n \times m$-matrise. Vis at da er

$$\text{rang}(AB) = \text{rang}(B).$$

Oppgave 2

a) La A være matrisa $A = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix}$. Diagonaliser matrisa A.

b) Ved presidentvalget i USA i 1960 ble det avlagt 6 800 000 stemmer i staten Adirolf. Den republikanske kandidaten fikk 71 % av stemmene, mens den demokratiske kandidaten fikk 29 % av stemmene.

Det viser seg at det ved hvert presidentvalg blir avlagt 6 800 000 stemmer i Adidolf. For enkelhets skyld antar vi at det er de samme som stemmer ved alle valg. Imidlertid så stemmer 30 % av de som stemte republikansk ved et valg, demokratisk ved neste valg. Det samme skjer hos demokratene, 30 % av de som stemte demokratisk ved forrige valg, stemmer republikansk ved neste valg.

Hvilken kandidat vinner valget i 2000 i denne staten, og med hvor mange stemmer? (Det er valg hvert 4. år i USA).

Hvordan vil fordelingen mellom de to partiene bli i det lange løp i denne staten?

Oppgave 3

La M_{22} være vektorrommet

$$M_{22} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

a) Vis at

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

er en basis for M_{22}.

b) La $T : M_{22} \longrightarrow M_{22}$ være avbildningen definert ved at

$$T(A) = A - A^T$$

der A^T er den transponerte av A.

Vis at T er en lineæroperator på M_{22} og finn matrisa til T med hensyn på basisen $\mathcal{B}$.

c) Vis at billedmengden, $R(T)$, til T er

$$R(T) = \{B \in M_{22} \, B^T = B\}$$

d) Finn kjernen, $\text{Ker}(T)$, til lineær operatoren T.

Oppgave 4

La A være den komplekse matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & i \\ 0 & -i & 2 \end{bmatrix}$$

a) Finn ei inverterbar matrise P som diagonaliserer A.

b) Løs differensialligningssystemet

$$\begin{aligned} x' &= 2x \\ y' &= \quad 2y + iz \\ z' &= \quad -iy + 2z \end{aligned}$$

med initial betingelser

$$x(0) = 4, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 6.$$

Oppgave 5

La P_2 være vektorrommet som består av alle polynom med grad høyst lik 2.

a) Vis at

$$< f, g >= \int_0^1 f(x)g(x)dx, \quad f, g \in P_2$$

definerer et indreprodukt på P_2.

b) La $V = \{p \in P_2 | p(x) = a + bx + ax^2\}$.
Vis at V er et underrom av P_2.

c) Finn en ortonormal basis for V med hensyn på indreproduktet i a).

d) Finn den beste tilnærmingen til polynomet $f(x) = 1 + x$ med et polynom i V.