Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Førsteamanuensis Aslak Bakke Buan
Telefon: 5 02 89

MNFMA108, Lineær algebra

Bokmål
Tirsdag 27. november 2001
Kl. 9-15
Hjelpemidler: Utdelt kalkulator
Sensur: 18. desember 2001
Alle svar skal begrunnes

Oppgave 1

La $M = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & a & 3 \end{pmatrix}$, der a er et reelt tall.

a) Bestem determinanten til M. For hvilke verdier av a er M inverterbar?

b) Finn nullrommet til M for alle forskjellige verdier av a?

c) Hva er rangen til M for alle forskjellige verdier av a?

d) La $a = 3$. Finn den inverse matrisa M^{-1}, og løs likningssettet

$$M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

e) La $a = 1$. Finn en matrise P slik at $P^{-1}MP$ er en diagonal matrise.

Oppgave 2

Gitt tre punkter i planet (x_1, y_1), (x_2, y_2) og (x_3, y_3), som ikke ligger på en rett linje. Da finnes en unik sirkel gjennom punktene, med likning

$$c_1(x^2 + y^2) + c_2 x + c_3 y + c_4 = 0.$$

a) Finn en 4×4-matrise A slik at $\det A = 0$ gir oss likningen for sirkelen, der $\det A$ betegner determinanten til A.

b) Bruk a) til å finne sirkelen gjennom punktene $(2,6), (2,0)$ og $(5,3)$.

Oppgave 3

La V være vektorrommet av alle polynomer på formen $f(x) = a + bx^2$, der a, b er reelle tall.

a) Vis at dette er et underrom av $\mathbf{P}_2$, rommet av alle polynomer av grad høyst to (med reelle koeffisienter), og finn en basis for V.

La $T\colon V \to \mathbf{R}^2$ være funksjonen gitt ved

$$T(f) = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \end{pmatrix}.$$

b) Vis at T er en en-entydig (injektiv) lineær-transformasjon.

c) Vis at

$$< f, g > = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

gir et indreprodukt på $\mathbf{P}_2$, mens

$$< f, g > = f(0)g(0) + f(1)g(1)$$

ikke gir et indreprodukt på $\mathbf{P}_2$. Vil

$$< f, g > = f(0)g(0) + f(1)g(1)$$

gi et indreprodukt på V?

d) Finn en ortonormal basis for rommet V med hensyn på indreproduktet

$$< f, g > = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Oppgave 4

a) Hva vil det si at en matrise er diagonaliserbar? Hva vil det si at en matrise er ortogonalt diagonaliserbar?

La $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ være en symmetrisk matrise der a, b og c er reelle tall. Anta at A bare har positive egenverdier.

b) Vis først at $\det A > 0$. Bruk så dette, samt at A har (minst) en positiv egenverdi til å vise at $a > 0$.

c) Bruk resultatene fra b) til å vise følgende: Det finnes en unik reell matrise

$$L = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$$

med $x, z > 0$ slik at $A = LL^T$, der L^T er den transponerte matrisen til L.