Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Elena Celledoni, tlf. 93541, mobil 48238584

EKSAMEN I FAG MA1202 LINEÆR ALGEBRA MED ANVENDELSER

Lordag 17. desember 2005
Tid: 15:00–19:00

Hjelpemidler: C – Rottmann formelsamling.
Enkel kalkulator (HP 30S).

Alle svar skal begrunnes.

Sensuren faller i uke 3.

Oppgave 1

La t være et reelt tall og se på matrisen

$$A_t = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & -t & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Bestem rang og nullitet for A_t for hver t.

b) For hvilke t har ligningssystemet

$$A_t \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

1. nøyaktig en løsning
2. ingen løsning
3. uendelig mange løsninger.

Oppgave 2

Betrakt mengden

$$\mathcal{M} := \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} \quad \text{s.a.} \quad a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

a) Vis at $\mathcal{M}$ er et underrom av vektorrommet $M_{3,3}$ av 3×3 reelle matriser. Vis at

$$\mathcal{B} := \left\{ E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

er en basis for $\mathcal{M}$. Betrakt indreproduktet

$$\langle A, B \rangle \;:=\; \operatorname{trace}(A^T B), \quad A, B \in \mathcal{M}.$$

Finn en ortonormal basis for $\mathcal{M}$ med hensyn på dette indreproduktet.

b) Betrakt $T : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ slik at

$$T(A) = E_1 A - A E_1.$$

Vis at T er en lineær transformasjon på $\mathcal{M}$. Finn matrisa til T med hensyn på basisen $\mathcal{B}$.

c) Avgjør om T er en-entydig. Finn billedmengde $R(T)$ og kjernen (nullrommet) $\operatorname{Ker}(T)$ til T.

Oppgave 3

Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

er gitt. Vis at A er normal. Diagonaliser A ved hjelp av en unitær similartransformasjon.

Oppgave 4

Betrakt $n \times n$-matrisen S der $\det(S) \neq 0$. Betrakt den lineære transformasjonen $T : M_{n,n} \to M_{n,n}$ slik at

$$T(A) = S^{-1} A S.$$

Vis at λ er en egenverdi til A hvis og bare hvis λ er en egenverdi til $T(A)$.

Oppgave 5

I desember 2005, på en lekebutikk i Trondheim brukes det papir av to forskjellige farger for innpakning av julegaver, rødt eller blått.

Det viser seg at hvis siste gave er blitt pakket i rødt papir er det 60% sannsynlighet for at blått papir blir brukt til neste pakke og 40% sannsynlighet at rødt papir blir brukt. Hvis siste gave er blitt pakket i blått papir er det 45% sannsynlighet for at blått papir blir brukt til neste pakke og 55% sannsynlighet at rødt papir blir brukt.

Med hvilken sannsynlighet blir rødt og blått papir brukt i det lange løp?