Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Fagleg kontakt under eksamen:
Lars Sydnes (93 03 56 85 / 73 59 17 95)

EKSAMEN I MA1202: Lineær algebra med anvendelser.
NYNORSK

Torsdag 17.desember 2009
Tid: 09:00-13:00

Sensur: 17.januar 2010

Hjelpemiddel: Kode D; enkel kalkulator (HP30S eller Citizen SR-270X).

Alle svar skal grunngis.

Oppgåve 1 Sjå på dei radekvivalente matrisene

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ og } R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Finn rangen og nulliteten til matrisa A.

b) Finn basisar for nullrommet $\mathrm{Null}(A)$ og søylerommet $\mathrm{Col}(A)$ til A.

c) La $T_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ vere lineæravbildninga gitt ved multiplikasjon med matrisa A. Finn ein ortonormal basis for bildet $R(T_A)$ til T_A.

Oppgåve 2 I denne oppgåva skal vi sjå på matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Forklar – utan å vise til ei konkret diagonalisering – kvifor A er ortogonalt diagonaliserbar.

Vis at $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 4$ er eigenverdiar for A, og finn dei algebraiske multiplisitetane.

Når du skal svare på dei neste punkta kan det vere nyttig å vite at matrisa

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

diagonaliserer A ortogonalt.

b) Finn den løysninga $\mathbf{y}(t)$ av differensiallikninga $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ som oppfyller startkravet $\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

c) Finn sentrum av ellipsoiden

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz - 4\sqrt{3}x - 4\sqrt{3}y - 4\sqrt{3}z + 1 = 0.$$

Oppgåve 3 La P_n vere vektorrommet av reelle polynom i variabelen x med grad mindre enn eller lik n.

La $T\colon P_2 \to P_2$ vere lineæravbildninga definert ved at

$$T(p(x)) = p(2x-1) \quad \text{når} \quad p(x) \in P_2.$$

Sjå på standardbasisen $\mathcal{S} = \{1, x, x^2\}$ for P_2, og la $A = [T]_{\mathcal{SS}}$ vere matrisa til T i basisen $\mathcal{S}$.

a) Grunngi at

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

b) Finn ein basis for $\mathbb{R}^3$ som er danna av eigenvektorar for matrisa A.

c) Finn ein basis $\mathcal{B}$ for P_2 som er danna av eigenvektorar for T.
Kva er matrisa $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ til T i basisen $\mathcal{B}$?

Oppgåve 4 La $M_{n\times n}$ vere vektorrommet av reelle $n \times n$-matriser

a) Forklar kvifor formelen

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^T B) \tag{1}$$

gir eit indreprodukt på $M_{n\times n}$.

Tips: $\operatorname{tr}(X)$ = summen av diagonalelementa i matrisa X. Du kan fritt nytta at $\operatorname{tr}\colon M_{n\times n} \to \mathbb{R}$ er ei lineæravbildning og at $\operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr}(A)$.

La $S_n \subseteq M_{n\times n}$ vere mengda av symmetriske $n \times n$-matriser.

b) Grunngi at S_n er eit underrom av $M_{n\times n}$ og at matrisene

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dannar ein ortonormal basis for S_2.

La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Finn den ortogonale projeksjonen av A på S_2.

Oppgåve 5 La A vere ei kompleks $n \times n$-matrise.

a) Anta at A er unitært diagonaliserbar med reelle eigenverdiar. Forklar kvifor A må vere hermitesk.

b) Anta at A er skeiv-hermitesk. Grunngi at eigenverdiane til A har realdel 0.