UNIVERSITETET I TRONDHEIM Bokmål

DEN ALLMENVITENSKAPELIGE HØYSKOLEN

INSTITUTT FOR MATEMATIKK OG STATISTIKK

EKSAMEN I MA108 - LINEÆR ALGEBRA

Dato: 28. november 1995 Antall timer: 6

Antall vekttall: 5
Antall sider bokmål: 3
Antall sider nynorsk: 0
Antall vedlegg: 0

Tillatte hjelpemidler:
Utdelt kalkulator

Sensurdato: 19. desember 1995

Oppgave 1

Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 6 & 6 \\ 3 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

er gitt.

a) Finn den inverse matrisen til A.

b) For hvilke s ligger løsningen av likningssystemet

$$\begin{aligned} y - z &= 1 \\ -3x + 6y + 6z &= 3s \\ 3x - 5y - 4z &= 5 \end{aligned}$$

i planet $x + y + z = 21$?

c) Finn en ortonormal basis for kolonnerommet til A.

Oppgave 2

La V være indreproduktrommet av funksjoner av typen

$$f(x) = a + bx + c \sin x$$

der a, b $\in$ R. Indreproduktet i V er definert ved

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

a) Vis at $\{1, x, \sin x\}$ er en basis for V.

b) Finn en ortonormal basis for underrommet utspent av de to funksjonene $f(x) = 1$ og $g(x) = x$.

Oppgave 3

Matrisen M er gitt ved

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Finn egenverdiene og de to egen-rommene E_1 og E_2 til M.

b) Finn matrisen P som diagonaliserer M og den tilhørende diagonalmatrisen.

c) Vis at en vilkårlig $\underline{v} \in R^3$ kan skrives entydig som den sum $\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$ der $\underline{v}_1 \in E_1$ og $\underline{v}_2 \in E_2$.

Oppgave 4

a) Overfør kjeglesnittet

$$x^2 + 4xy + y^2 = 1$$

til standard form, finn ut hvilket kjeglesnitt det er.

b) Tegn kjeglesnittet i koordinatsystemet som har x og y som koordinater.

Oppgave 5

Finn de komplekse løsningene av

$$z^4 = 8 - 8\sqrt{3}i$$

Skriv svaret både på formen $z = re^{i\theta}$ og på formen $z = a + bi$.
Plasser løsningene i det komplekse planet.