NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET

Bokmål

Eksamen I MA108: Lineær Algebra

Antall timer: 6
Antall vekttal: 5. Ingen tillate hjælpemidler.
Antall sider bokmål: 3
Antal sider nynorsk: 0
Antall vedlegg: 0
Sensurdato: 17. december 1996

26. november 1996

N.B. La $\mathcal{R}$ stå for de reelle tal.

Opgave 1 La $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$.

1. Finn en basis til kjernen av $T_A : \mathcal{R}^4 \to \mathcal{R}^2$, gitt ved $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ for hver $\mathbf{x}$ i $\mathcal{R}^4$.
2. Finn en basis til bildet av T_A.
3. Finn alle løsninger av likningssettet,

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} -3x_1 & + & & & & - & 6x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 5x_4 & = & 0 \end{array}$$

Opgave 2 La $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, og $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Vis at determinanten av 4×4 matrisen $\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}$, uttrykt i blokmatrise form, tilfredstiller

$$\begin{vmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{vmatrix} = \det(A)\det(B).$$

Opgave 3 La $v_1 = (1, 0, \ldots, 0), v_2 = (1, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, v_n = (1, 1, \ldots, 1)$ i $\mathcal{R}^n$.

1. Vis at $\{v_1, \ldots, v_n\}$ er en basis for $\mathcal{R}^n$.
2. Ortonormaliser basisen $\{v_1, \ldots, v_n\}$ for $\mathcal{R}^n$ ved å bruke Gram-Schmidt.

Opgave 4 La $v_1, \ldots, v_n$ være vektorer i en vektorrom V. Definere en avbildning $T : \mathcal{R}^n \to V$ ved

$$T(a_1, \ldots, a_n) = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n.$$

1. Vis at T er en lineær transformasjon.
2. Vis at T er inverterbar hvis og kun hvis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ er en basis for V.

Opgave 5 La P_2 være vektorrommet av alle polynomfunksjoner av grad høyst 2, med indreprodukt $\langle \, , \, \rangle$ definert ved

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

for f og g i P_2.

1. Vis at avbildningen $T : P_2 \to P_2$, gitt ved $T(f) = f + f' + f''$ når f er i P_2, er en lineær transformasjon.
2. Finn matrisen til $T : P_2 \to P_2$ med hensyn på basisen $\{1, x, x^2\}$.
3. Avgjør om T er inverterbar. Begrunn dit svar.
4. Ortonormaliser basisen $\{1, x, x^2\}$ for P_2 ved å bruke Gram-Schmidt.

Opgave 6 La $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. La $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}A\mathbf{x}^T$, for hver $\mathbf{x}$ i $\mathcal{R}^3$, være den assosierte kvadratiske form.

1. Bestem formlen for $q(x_1, x_2, x_3)$.
2. Diagonalisere A.

3. Finn den største og den minste verdien til $q(\mathbf{x})$ på enhetssfæren $||\mathbf{x}||^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

4. Vis at egenvektorene av A er ortogonale til hverandre.

5. Bestem den lineær transformasjon T_P av $\mathcal{R}^3$ i sigselv, $\mathbf{x} \mapsto P\mathbf{x} = \mathbf{y}$ som diagonaliserer $q(\mathbf{x})$.

MERK! Studentene må gjøre seg kjent med sensuren ved å oppsøke sensuroppslagene eller ved hjelp av tastafon (telefon med stjerne og firkanttast) vil en kunne få opplysninger om sensur i egne fag og emner. Ring 815 48014 og følg de anvisninger som blir gitt. Eksamenskontoret eller instituttet kan dessverre ikke svare på henvendelser om sensur.