Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Sverre O. Smalø
73 59 17 50

Eksamen i MA 108, *Lineær algebra*

Onsdag 26. november 1997
Kl. 9-15
Tillatte hjelpemidler: Ingen tillatte hjelpemidler
Sensurdato: 17. desember 1997

Oppgave 1

a) For hvilke verdier av r er matrisen

$$\begin{bmatrix} 4 & r \\ 2r & 8 \end{bmatrix}$$

inverterbar? Finn den inverse matrisen for disse verdiene av r.

b) Drøft hvordan antall løsninger for likningssystemet

$$\begin{aligned} 4x + ry &= r - 2 \\ 2rx + 8y &= r \end{aligned}$$

avhenger av r.

c) Bestem rangen til koeffisientmatrisen til likningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + kx_k + \ldots + 100x_{100} &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + \ldots + 2^k x_k + \ldots + 2^{100}x_{100} &= 0 \end{aligned}$$

Finn dimensjonen til løsningsrommet.

Oppgave 2 Betrakt $\mathbb{R}^4$ med Euklidsk indreprodukt. La $W \subset \mathbb{R}^4$ være løsningsrommet til likningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

a) Finn en basis for W.

b) Betrakt vektoren

$$v_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Finn en ortonormert basis for W som har v_1 som første basisvektor.

c) Finn den minste verdien som uttrykket

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + x_3^2 + x_4^2$$

kan få når $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ varierer i W

Oppgave 3 Det er gitt en kurve C i xy-planet ved likningen

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 20x + 15y = 0$$

a) Finn et ortonormert koordinatsystem som forenkler likningen mest mulig.

b) Lag en skisse av kurven C, og angi også x-aksen og y-aksen og aksene i det nye systemet.

Oppgave 4 I vektorrommet av alle funksjoner som er definert på $\mathbb{R}$ lar vi V være underrommet med basis

$$B = \{1, x, x^2, e^x\}$$

La $T : V \to V$ være lineæravbildningen gitt ved

$$T(f(x)) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$$

(f' og f'' står for henholdsvis derivert og dobbeltderivert).

a) Finn matrisen til T med hensyn på basisen B.

b) Bestem rangen til T (rank of T) og finn en basis for kjernen ker(T).

Oppgave 5

a) Vis at røttene i likningen

$$z + \frac{1}{z} = 2\cos\alpha ,$$

der α er et vilkårlig reelt tall, ligger på enhetssirkelen ($|z| = 1$) i det komplekse plan.

b) Vis omvendt at om z er et komplekst tall på enhetssirkelen så er $z + \frac{1}{z}$ reell og $-2 \leq z + \frac{1}{z} \leq 2$.