Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Inger Heidi Slungård
73 59 18 92

Eksamen i MNFMA 108, *Lineær algebra*

Bokmål
Tirsdag 30. mai 2000
Kl. 9-15
Tillatte hjelpemidler: Utdelt kalkulator
Sensurdato: 20. juni 2000

Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1

La A være matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{bmatrix}.$$

Hva er rangen og nulliteten til matrisa A?
Finn basiser for radrommet, kolonnerommet og nullrommet til matrisa A.

Oppgave 2

La P_2 være vektorrommet av polynom av grad mindre eller lik 2. Vektorrommet blir et indreproduktrom med indreproduktet

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

a) Bruk Gram-Schmidt-metoden til å ortonormalisere basisen $B = \{1, x, x^2\}$ for P_2.

b) La $T : P_2 \to P_2$ være en avbildning definert ved at

$$T(f) = xf'(x) + f''(x) \text{ for en funksjon } f \in P_2.$$

Vis at T er en lineær operator, og finn matrisa til T, $[T]_B$, med hensyn på basisen $B = \{1, x, x^2\}$. Finn bildet, $R(T)$, og kjernen, $Ker(T)$, til lineær operatoren T.

Oppgave 3

En rakett skytes rett opp på nyttårsaften. I det raketten går tom for brennstoff begynner vi å måle høyden til raketten hvert sekund. Målingene er som følger:

tid (t)	0 s	1 s	2 s	3 s	4 s
høyde (s)	40 m	45 m	41 m	26 m	2 m

Høyden til raketten etter t sekunder vil være gitt ved formelen

$$s = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

der v_0 er farten og s_0 er høyden, begge i det raketten går tom for brennstoff, og g er gravitasjonskonstanten. Bruk målingene til å gi et estimat for s_0, v_0 og g.

Oppgave 4

En spesiell koloni av flaggermus har en levetid på mindre enn 3 år. Vi vet følgende om hunflaggermusene i denne kolonien : Ingen hunner yngre enn 1 år får barn, hunner mellom 1 og 2 år føder i gjennomsnitt 2 hunflaggermus hver og hunner over 2 år føder i gjennomsnitt 1 hun hver. Vi vet også at sannsynligheten for at en hunflaggermus som er over 1 år blir 2 år, er 0.5. Sannsynligheten for at en nyfødt hunflaggermus overlever det første året kjenner vi ikke. Kall denne sannsynligheten for q. Når vi staret våre observasjoner av denne kolonien er det 300 hunner under 1 år, 180 hunner mellom 1 og 2 år, og 130 av hunnene er over 2 år.

a) Skriv ned Leslie matrisa A for denne kolonien av flaggermus og beregn hvor mange hunflaggermus det er i hver aldersklasse etter 3 år uttrykt ved q.

b) Etter å ha observert denne bestanden i mange år legger vi merke til at antall hunflaggermus nå holder seg konstant fra år til år. Beregn hva q må være.

c) Når denne likevekten har inntruffet er det 640 hunflaggermus i kolonien. Hvordan vil disse fordele seg på de tre aldersklassene?

Oppgave 5

a) La A være matrisa

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Finn en inverterbar matrise P som diagonaliserer A. Angi også diagonalmatrisa $D = P^{-1}AP$.

b) Løs følgende system av differensialligninger

$$\begin{aligned} x_1' &= -4x_1 - 6x_2 \\ x_2' &= 3x_1 + 5x_2 \\ x_3' &= 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \end{aligned}$$

med initial betingelser

$$x_1(0) = 0, x_2(0) = 2, x_3(0) = 1.$$

Oppgave 6

La A være ei kompleks matrise. Matrisa A er hermittisk hvis $A^* = A$, og den er skjev-hermittisk hvis $A^* = -A$. ($A^* = \overline{A^T}$ er den konjugert-transponerte av A).

a) Anta at A er hermittisk, og la λ være en egenverdi for A. Vis at da er λ et reelt tall.

b) La A være ei kompleks $n \times n$-matrise. Vis at det finnes komplekse $n \times n$-matriser B og C slik at B er hermittisk, C er skjev-hermittisk og $A = B + C$.