Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Sverre Smalø Telefon: 73 59 17 50

EKSAMEN I FAG MNFMA108 LINEÆR ALGEBRA

Bokmål
Fredag 1. juni 2001
Kl. 09.00 - 15.00
Sensur: Fredag 22. juni 2001

Hjelpemidler: Utdelt kalkulator.

Oppgave 1

La a og d være reelle tall og betrakt matrisa $M_{a,d}$ gitt ved

$$M_{a,d} = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & d & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

$$La\ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Finn $P^{-1}\, M_{a,d}\, P$?

b) Finn betingelsen på a og d slik at rangen til $M_{a,d}$ er 4.
Hvilke verdier vil rangen til $M_{a,d}$ og nulliteten til $M_{a,d}$ anta?

Oppgave 2

La r være et naturlig tall ($r \in \{1, 2, 3, \ldots\}$)

Betrakt matrisa

$$E_r = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ og la}$$

$T_r = -(E_r^{-1})^T\, E_r$.

a) Regn ut og verifiser at

$$T_r = \begin{pmatrix} -1 & r \\ -r & r^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

b) Avgjør for hvilke r matrisen T_r kan diagonaliseres som reell matrise.

Oppgave 3

Betrakt indreproduktrommet $\mathbb{R}^3$, med vanlig prikkprodukt.

$$La\ v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Bruk Gram-Schmidts ortogonaliseringsprosess til å finne w_2 og w_3 slik at $\{v_1, w_2, w_3\}$ er en ortogonal basis for $\mathbb{R}^3$.

b) Finn matrisa $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2v_1v_1^T\right]$ der $v_1v_1^T$ er vanlig matrisemultiplikasjon der v_1 oppfattes som en 3×1-matrise. Vis at v_1, w_2 og w_3 fra del **a)** av oppgaven er egenvektorer til denne matrisen.

c) La u være en vektor i $\mathbb{R}^3$ med $\|u\| = 1$. Forklar hvorfor $I - 2uu^T$ er matrisa til lineærtransformasjonen en får ved å speile i planet normalt på u der I er 3 x 3 - identitetsmatrisen og u oppfattes som en 3×1-matrise.

Oppgave 4

Anta at vi har observert en barkebillebestand av hunnbiller i et område. Etter at bestanden er delt inn i tre aldersgrupper fremkommer følgende data, der bare hunnbiller teller med i alle tall.

Aldersgruppe 1 gjenføder ingen mens 90 % fra aldersgruppe 1 overlever til aldersgruppe 2. Fra aldersgruppe 2 får halvparten ett avkom og 11 av 15 overlever til tredje aldersgruppe. I tredje aldergruppe får 5 av 6 ett avkom mens alle i tredje aldersgruppe dør ut i løpet av denne perioden.

a) Skriv ned Leslie-matrisen til populasjonen over.

b) Finn egenverdiene til denne matrisen (en reell og to ikkereelle) og vis at de ikkereelle egenverdiene har absoluttverdi mindre enn 1.

c) Finn egenvektoren tilhørende den reelle egenverdien og forklar hva som skjer i det lange løp dersom trenden ved observasjonen fortsetter?

Oppgave 5

La V og W være vektorrom og $f : V \to W$ en lineæravbildning.

a) Vis at dersom $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ er en basis for V så er bildet til f lik $\operatorname{lin\,span}(f(v_1), \ldots, f(v_n))$, vektorunderrommet av W utspent av $f(v_1), \ldots, f(v_n)$.

b) Vis at dersom $\{w_1, \ldots, w_m\}$ er lineært uavhengig i bildet til f og $u_1, \ldots, u_m$ i V er valgt slik at $f(u_i) = w_i$ så er $\{u_1, \ldots, u_m\}$ lineært uavhengig i V.