Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Christian F. Skau
Telefon: 73 59 17 55

MNFMA 108, Lineær Algebra

Bokmål
Fredag 31.mai 2002
Kl. 9-15
Hjelpemidler: Utdelt kalkulator.
Sensur: Fredag 21.juni 2002

Oppgave 1

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & -3 & -3 & -4 \\ 4 & -6 & 9 & 5 & 9 \\ -2 & 3 & 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det er oppgitt at B er rad-ekvivalent ("row equivalent") til A.

a) Finn rang (A) og dim (Null (A)). Hva er $\dim(R(A))$, der $R(A) = \{A\vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^5\}$?

b) Finn basiser for henholdsvis radrommet, kolonnerommet og nullrommet til A.

Oppgave 2

La $V \subset \mathbb{R}^4$ være løsningsrommet til ligningssystemet

$$x + y - z + w = 0$$
$$x + 2y - 2z + w = 0$$

a) Finn en ortonormal basis for V.

b) Finn en ortonormal basis for $\mathbb{R}^4$, der de to første basiselementene er de du fant i a).

c) Finn den beste approksimasjonen til $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ i V.

Oppgave 3

Som et miljøtiltak har Trondheim kommune utplassert 350 sykler til gratis utleie på tre steder i byen: i sentrum (A), i øst (B) og i vest (C). Syklene kan lånes fra tidlig om morgenen mot en viss sum, som fås tilbake ved tilbakelevering innen samme kveld. Etter en prøveperiode har man erfart at syklene utlånt om morgenen fra (A) leveres tilbake om kvelden etter følgende mønster: 80% til (A), 10% til (B) og 10% til (C). Tilbakeleveringsprosentene fra (B) er: 30% til (A), 60% til (B) og 10% til (C), mens de fra (C) er: 30% til (A), 10% til (B) og 60% til (C). For enkelthets skyld antar vi at dette mønsteret gjentar seg dag etter dag, at alle sykler blir utlånt hver morgen og at ingen sykler blir stjålet .

a) En morgen viser det seg at de utplasserte syklene fordeler seg slik: 180 i (A), 85 i (B) og 85 i (C). Finn hvordan syklene var fordelt om morgenen dagen før.

b) I det lange løp vil den prosentvise fordelingen (morgen eller kveld) av syklene mellom (A), (B) og (C) nærme seg en bestemt "likevekts"-fordeling, uansett hvordan fordelingen var i utgangspunktet. Begrunn denne påstanden ved å uttrykke den i et matematisk språk og ved å nevne hvilket resultat fra teorien som den bygger på. Bestem deretter hvordan syklene vil tilnærmelsesvis fordele seg mellom (A), (B) og (C) i det lange løp.

Oppgave 4

a) La $Q(x,y) = \frac{3}{2}x^2 - xy + \frac{3}{2}y^2$. Avgjør hva slags kurve $Q(x,y) = 1$ er. Begrunn svaret.

b) Finn maksimums- og minimumsverdien til $Q(x,y)$ når $x^2 + y^2 = 4$.

Oppgave 5

a) La P være matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Vis at P er invertibel og finn P^{-1}.

b) For hvert reelt tall t, la A_t være matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5t \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & t^2+6 \end{bmatrix}$. Drøft hvordan rang (A_t) varierer med t, og angi for hver t en basis for kolonnerommet til A_t som består av kolonnevektorer til A_t.