**Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag**

Faglig kontakt under eksamen: Mats Molberg
Telefon: (735)97774

Eksamen i MA1202 Lineær algebra med anvendelser

Bokmål
Fredag 14. mai 2004
Kl. 09.00-13.00
Hjelpemidler: Kalkulator HP30S
Sensur: Fredag 4. juni 2004.

Hvert av de 9 punktene teller likt.

Alle svar skal begrunnes. Du må ta med så mye mellomregninger at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

a) La $t \in \mathbb{R}$ og

$$M_t = \begin{bmatrix} t & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Bestem rang og nullitet for M_t for alle t. Finn en basis for radrommet til M_t for hver t.

b) La P_2 være vektorrommet av alle reelle polynom med grad mindre eller lik 2 med basisen $B = \{1, x, x^2\}$, og la $T : P_2 \longrightarrow P_2$ være den lineære operatoren gitt ved

$$T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = (2a_0 + a_1) + (2a_0 + a_2)x + (a_0 + 3a_1 - a_2)x^2.$$

Finn $[T]_B$, $\ker(T)$ og avgjør om T er en-entydig.

Oppgave 2

La W være planet med likning $x + y + z = 0$ i $\mathbb{R}^3$.

a) Vis at W er et underrom av $\mathbb{R}^3$.

b) Finn en ortonormal basis for W med hensyn på det Euklidske indreproduktet.

Oppgave 3

Hunndyrandelen av en dyrepopulasjon er beskrevet ved en Leslie modell med tre aldersgrupper. Den tilhørende Lesliematrisen er gitt ved

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ \frac{9}{17} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} & 0 \end{bmatrix}.$$

Vis at $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ er en egenverdi for L, og bestem hvorvidt populasjonen på sikt er voksende, avtagende eller stabil.

Oppgave 4

a) Begrunn hvorfor likningsettet

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 3 \\ x_1 & + & 3x_2 & = & 2 \end{array}$$

ikke har noen løsning, og finn minste kvadraters løsning av systemet.

b) Finn den beste tilnærmingen - i henhold til minste kvadraters metode - av en rett linje $y = a + bx$ til punktene $(0, 1), (1, 1), (2, 3)$ og $(3, 2)$.

Oppgave 5

a) La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3+i & 3i & 4 \\ 3-i & 1 & -2 & 2+i \\ -3i & -2 & -1 & 1-i \\ 4 & 2-i & 1+i & 3 \end{bmatrix}.$$

Svar på følgende:

- Er A er hermitisk?
- Er A unitært diagonaliserbar?

b) La B være en vilkårlig hermitisk matrise. Vis at $\det(B)$ er et reelt tall.